Université Claude Bernard Lyon I. Année universitaire 2010-2011
Licence STS, UE MAT 3001L (Topologie Générale)

CORRIGÉ DU CONTRÔLE CONTINU TERMINAL DU 21 JANVIER 2011

EXERCICE 1

Soient X et Y deux espaces métriques, et $f : X \to Y$ une fonction. On note $G(f) = \{(x,y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$ le graphe de f.

Question 1. On suppose que f est continue. Pour montrer que $G(f)$ est fermé dans $X \times Y$, il suffit de prouver que, si $(x_n)_{n\geq 1}$ est une suite de points de X telle que $(x_n, f(x_n)) \to (x,y)$, alors $y = f(x)$. Or on a $x_n \to x$ et, comme f est continue, $f(x_n) \to f(x)$. Par ailleurs, $f(x_n) \to y$, d'où, par unicité de la limite, $f(x) = y$, ce qui prouve que $G(f)$ est fermé dans $X \times Y$. ■

Question 2. On suppose que $G(f)$ est fermé dans $X \times Y$, et que Y est compact. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de points de X convergeant vers un point $x \in X$. Comme Y est un espace métrique compact, on peut extraire de la suite $(f(x_n))_{n\geq 1}$ une sous-suite convergente vers un point $y \in Y$. Il existe donc une sous-suite $(x_{n(k)})_{k\geq 1}$ telle que $(x_{n(k)}, f(x_{n(k)})) \underset{k\to+\infty}{\to} (x,y)$. Comme $G(f)$ est fermé dans $X \times Y$, $(x,y) \in G(f)$ et donc $y = f(x)$. En particulier, $f(x_{n(k)}) \underset{k\to\infty}{\to} f(x)$. Montrons par l'absurde que $f(x_n) \to f(x)$, ce qui prouvera que f est continue au point x. Si la suite $(f(x_n))_{n\geq 1}$ ne tend pas vers $f(x)$, il existe $\varepsilon > 0$ et une suite $(x'_n)_{n\geq 1}$ extraite de $(x_n)_{n\geq 1}$ tels que $d(f(x'_n), f(x)) \geq \varepsilon$. Comme la suite $(x'_n)_{n\geq 1}$ converge vers x, ce qui précède montre que l'on peut en extraire une sous-suite $(x'_{n(k)})_{k\geq 1}$ telle que $f(x'_{n(k)}) \to f(x)$. Mais ceci est absurde, puisque $d(f(x'_{n(k)}), f(x)) \geq \varepsilon$ pour tout $k \geq 1$. Ainsi, on a $f(x_n) \to f(x)$, et la fonction f est continue au point x pour tout $x \in X$. ■

EXERCICE 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante.

Question 1. Pour $x,y \in \mathbb{R}$, posons $d_f(x,y) = |f(x) - f(y)|$. On a : $d_f(x,y) = d_f(y,x) \geq 0$, et $d_f(x,y) = 0 \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$, car f est injective (elle est strictement croissante). Enfin, on a pour x,y,z réels

$$d_f(x,y) = |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(z)| + |f(z) - f(y)| = d_f(x,z) + d_f(z,y),$$

ce qui achève de démontrer que d_f est une distance sur $\mathbb{R}$. ■

Question 2. On suppose maintenant que f est continue. Comme $\mathbb{R}$ est connexe, $f(\mathbb{R})$ est un connexe de $\mathbb{R}$, donc un intervalle I de $\mathbb{R}$. Posons $a = Inf(I)$ (resp. $b = Sup(I)$), où a est éventuellement égal à $-\infty$ (resp. b est éventuellement égal à $+\infty$). Montrons par l'absurde que $a \notin I$. En effet, si $a \in I$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = a$. Mais alors, comme $x - 1 < x$ et que f est strictement croissante, on a $f(x-1) < f(x) = a = Inf(I)$, ce qui est absurde puisque $f(x-1) \in I$. On montre de même que $b \notin I$, d'où finalement $I = f(\mathbb{R}) = \left]a,b\right[$. En particulier, I est ouvert. ■

Question 3. Soit $y_n = f(x_n)$ une suite de points de I convergeant vers $y = f(x) \in I$. Comme I est ouvert, il existe un point $f(u) \in I$ tel que $y = f(x) < f(u)$. Comme $f(x_n) \to y = f(x)$, il existe un entier $N \geq 1$ tel que : $n \geq N \Rightarrow f(x_n) < f(u) \Rightarrow x_n < u$. Il s'ensuit que la suite $(x_n)_n$ est majorée, et on montre de même qu'elle est minorée. Cette suite est donc bornée, de sorte que l'on peut en extraire une sous-suite $(x_{n(k)})_{k\geq 1}$ qui converge vers un point $v \in \mathbb{R}$. Comme f est supposée continue, on a $f(x_{n(k)}) \to f(v)$. Mais $f(x_{n(k)}) \to f(x)$, de sorte que $f(v) = f(x)$ et donc $x = v$. Nous avons ainsi montré que, si $f(x_n) \to f(x)$, il existe une sous-suite extraite de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ qui converge vers x. En particulier, de toute suite extraite de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ on peut extraire une sous-suite qui converge vers x, ce qui prouve que $x_n \to x$. On a donc :

$$(y_n = f(x_n) \to y = f(x)) \Rightarrow (x_n = f^{-1}(y_n) \to x = f^{-1}(y)),$$

ce qui implique que $f^{-1} : I \to \mathbb{R}$ est continue. ■

Question 4. Supposons que f soit continue. D'après la question 3, $f : \mathbb{R} \to I = f(\mathbb{R})$ est alors un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur I. On a donc, pour toute suite $(x_n)_n$ de réels et $x \in \mathbb{R}$:

$$d_f(x_n,x) \to 0 \Leftrightarrow f(x_n) \to f(x) \Leftrightarrow x_n \to x,$$

ce qui prouve que les suites convergentes sont les mêmes pour d_f et pour la topologie usuelle de $\mathbb{R}$. Il s'ensuit que d_f définit la topologie usuelle de $\mathbb{R}$.

Supposons inversement que d_f définisse la topologie usuelle de $\mathbb{R}$. Soit $(x_n)_n$ une suite de réels convergeant vers x. Alors $d_f(x_n,x) \to 0$ d'où $f(x_n) \to f(x)$, ce qui montre que f est continue. Ainsi, d_f définit la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ si et seulement si f est continue. ■

EXERCICE 3

Soit (X,d) un espace métrique compact non vide. On note Z l'ensemble des parties fermées et non vides de X. Pour toute partie A de X et tout $x \in X$, on pose $d_A(x) = inf\left\{ d(x,y) \middle| y \in A \right\}$.

Question 1. Soit A une partie de X. Pour x,x' dans X et $y \in A$, on a : $d(x,y) \le d(x,x') + d(x',y)$, et donc :

$$d_A(x) = \underset{y\in A}{Inf}\, d(x,y) \le d(x,x') + \underset{y\in A}{Inf}\, d(x',y) = d(x,x') + d_A(x').$$

On a ainsi $d_A(x) - d_A(x') \le d(x,x')$ et, en échangeant les rôles de x et de x', on obtient $d_A(x') - d_A(x) \le d(x,x')$, d'où :

$$\left|d_A(x) - d_A(x')\right| \le d(x,x') .$$

Il s'ensuit que l'application $x \to d_A(x)$ est uniformément continue sur X. Si $A \in Z$, la partie A est fermée dans X et, comme X est compact, A est compacte. Pour tout $x \in X$, l'application $y \to d(x,y)$ est continue sur le compact A, donc atteint sa borne inférieure. Il existe ainsi un point $x_A \in A$ tel que :

$$d(x,x_A) = \underset{y\in A}{Inf}\, d(x,y) = d(x,A) .■$$

Question 2. Posons, pour $A,B \in Z$:

$$\delta(A,B) = \underset{x\in X}{Sup}\left| d_A(x) - d_B(x)\right|.$$

Notons que, puisque X est compact et que l'application $x \to d_A(x) - d_B(x)$ est continue en vertu de la question 1, la borne supérieure $\underset{x\in X}{Sup}\left| d_A(x) - d_B(x)\right|$ est finie. On a clairement $\delta(A,B) = \delta(B,A) \geq 0$. Si $\delta(A,B) = 0$, on a $d_A = d_B$. Pour tout $x \in A$, on a alors : $0 = d_A(x) = d_B(x) = d(x, x_B)$, d'où $x = x_B \in B$. On a donc $A \subset B$ et, en échangeant les rôles de A et de B, $B \subset A$. La relation $\delta(A,B) = 0$ implique donc que $A = B$. Enfin, comme l'application $(f,g) \to \|f - g\|_\infty = \underset{x\in X}{Sup}|f(x) - g(x)|$ est une distance sur l'espace $C(X)$ des fonctions réelles continues sur X, on vérifie immédiatement que l'on a $\delta(A,B) \leq \delta(A,C) + \delta(C,B)$ quelles que soient A,B,C dans Z, ce qui achève de prouver que δ est une distance sur Z. ■

Question 3. Soit $(A_n)_n$ une suite de Cauchy dans (Z,δ). Alors, la suite des fonctions $f_n = d_{A_n}$ est une suite de Cauchy dans $C(X)$ muni de la norme $f \to \|f\|_\infty = \underset{x\in X}{Sup}|f(x)|$. Comme $C(X)$ est complet pour cette norme, il existe une fonction f continue sur X telle que :

$$\underset{x\in X}{Sup}\left|d_{A_n}(x) - f(x)\right| \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

En particulier, puisque les f_n sont positives, f est positive sur X. Posons $A = f^{-1}(0)$. Comme f est continue et que $\{0\}$ est fermé dans $\mathbb{R}$, A est fermé dans X. ■

Question 4. Soient $x \in X$ et $x_n \in A_n$ tels que $d_{A_n}(x) = d(x, x_n)$. Comme X est compact, il existe une suite $(x_{n(k)})_k$ extraite de $(x_n)_n$ qui converge vers un point $x_f \in X$. On a :

$$\begin{aligned}\left|f(x_f)\right| &\leq \left|f(x_f) - d_{A_{n(k)}}(x_f)\right| + \left|d_{A_{n(k)}}(x_f) - d_{A_{n(k)}}(x_{n(k)})\right| \\ &\leq \left\|f - d_{A_{n(k)}}\right\|_\infty + d(x_f, x_{n(k)}) \underset{k\to\infty}{\to} 0,\end{aligned}$$

et donc $f(x_f) = 0$. Ceci prouve en particulier que $A = f^{-1}(0)$ est non vide, donc appartient à Z. Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned}\left|f(x)-d(x,x_f)\right| &\le \left|f(x)-d_{A_{n(k)}}(x)\right| + \left|d_{A_{n(k)}}(x)-d(x,x_f)\right| \\ &\le \left\|f-d_{A_{n(k)}}\right\|_\infty + \left|d(x,x_{n(k)})-d(x,x_f)\right| \\ &\le \left\|f-d_{A_{n(k)}}\right\|_\infty + d(x_{n(k)},x_f) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,\end{aligned}$$

et donc $f(x)=d(x,x_f)$. Comme $x_f \in A$, on a :

$$f(x)=d(x,x_f) \ge \operatorname*{Inf}_{y\in A} d(x,y)=d_A(x). \blacksquare$$

Question 5. On reprend les notations des questions 3 et 4. Pour tout $x\in X$ et tout $a\in A$, on a :

$$\left|d_{A_n}(x)-d_{A_n}(a)\right| \le d(x,a),$$

d'où, en faisant tendre n vers l'infini :

$$\left|f(x)-f(a)\right| \le d(x,a).$$

Or $f(a)=0$, puisque $a\in A=f^{-1}(0)$, et f est positive. Il s'ensuit donc que $f(x)\le d(x,a)$. Comme cette inégalité est valable pour tout $a\in A$, on en déduit que : $f(x)\le \operatorname*{Inf}_{a\in A} d(x,a)=d_A(x)$. Mais $d_A(x)\le f(x)$ d'après la question 4, de sorte que l'on a $f=d_A$. Mais alors :

$$\delta(A_n,A)=\left\|d_{A_n}-d_A\right\|_\infty = \left\|d_{A_n}-f\right\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et la suite de Cauchy $(A_n)_n$ converge vers A dans Z. Ceci montre que (Z,δ) est complet. $\blacksquare$
