Université Claude Bernard Lyon I. Année universitaire 2010-2011
Licence STS, UE MAT 3001L (Topologie Générale)

CONTRÔLE CONTINU TERMINAL DU VENDREDI 21 JANVIER 2011

La durée de l'épreuve est de 3h. Un barème (sur 23 points) figure à titre indicatif. On attachera du prix à la rédaction des solutions.

EXERCICE 1 (sur 3 points)

Soient X et Y deux espaces métriques, et $f : X \to Y$ une fonction. Soit $G(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X\}$ le graphe de f.

Question 1 (1 point). On suppose que f est continue. Montrer que $G(f)$ est fermé dans $X \times Y$.

Question 2 (2 points). On suppose que $G(f)$ est fermé dans $X \times Y$, et que Y est compact. Montrer que f est continue.

EXERCICE 2 (sur 10 points)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante.

Question 1 (1 point). Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $d_f(x,y) = |f(x) - f(y)|$. Montrer que d_f est une distance sur $\mathbb{R}$.

Question 2 (4 points). On suppose que f est continue. Montrer que $f(\mathbb{R}) = I$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soit $y_n = f(x_n)$ une suite de points de I convergeant vers $y = f(x) \in I$. Montrer que la suite $(x_n)_n$ est bornée, puis que l'on a $x_n \to x$. En déduire que $f^{-1} : I \to \mathbb{R}$ est continue.

Question 3 (2 points). Montrer que d_f définit la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ si et seulement si f est continue.

Question 4 (3 points). On suppose que f est continue. Montrer que l'espace métrique $(\mathbb{R}, d_f)$ est complet si et seulement si $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

EXERCICE 3 (sur 10 points)

Soit (X,d) un espace métrique compact non vide. On note Z l'ensemble des parties fermées et non vides de X. Pour toute partie A de X et tout $x \in X$, on pose $d_A(x) = inf\{\, d(x,y) \mid y \in A\}$.

Question 1 (2 points). Montrer que, pour toute partie A de X, l'application $x \to d_A(x)$ est continue sur X. Montrer que, si $A \in Z$, il existe pour tout $x \in X$ un point $x_A \in A$ tel que $d(x,A) = d(x,x_A)$.

Question 2 (2 points). Pour $A,B \in Z$, on pose :

$$\delta(A,B) = \underset{x \in X}{Sup} \left| d_A(x) - d_B(x) \right|.$$

Montrer que δ est une distance sur Z.

Question 3 (4 points). Soit $(A_n)_n$ une suite de Cauchy dans (Z,δ). Montrer qu'il existe une fonction f positive continue sur X telle que :

$$\underset{x \in X}{Sup} \left| d_{A_n}(x) - f(x) \right| \underset{n \to +\infty}{\to} 0.$$

Posons $A = f^{-1}(0)$. Montrer que $A \in Z$. Soient $x \in X$ et $x_n \in A_n$ tels que $d_{A_n}(x) = d(x,x_n)$. Montrer l'existence d'une suite $(x_{n(k)})_k$ extraite de $(x_n)_n$ qui converge vers un point $x_f \in X$ tel que $f(x_f) = 0$. Montrer que $f(x) = d(x,x_f)$, et en déduire que $f(x) \geq d_A(x)$.

Question 4 (2 points). On reprend les notations de la question 3. Montrer que l'on a, pour tout $x \in X$ et tout $a \in A$:

$$f(x) = f(x) - f(a) \leq d(x,a).$$

En déduire que $f = d_A$. Montrer que $\delta(A_n, A) \to 0$, et en déduire que (Z,δ) est complet.
