Université Claude Bernard - Lyon 1 — Printemps 2011

Math II - PMI — Durée : 1 heure et 30 minutes

Partie commune - Devoir numéro 3

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si un étudiant est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Les exercices sont réputés indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. À l'intérieur d'un exercice, lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qu'il lui était demandé de démontrer

Exercice 1

On définit une application u de $\mathbf{R}^4$ vers $\mathbf{R}^3$ en posant, pour tous (x, y, z, t) de $\mathbf{R}^4$:

$$u(x, y, z, t) = (x - y, x - 4y + 3z + t, z - t).$$

1) Montrer que u est une application linéaire.

2) Déterminer une base du noyau de u. Quelle est la dimension de ce noyau ?

3) Déterminer le rang de u et en déduire l'image de u.

4) Soit F un supplémentaire du noyau de u dans $\mathbf{R}^4$. On appelle v la restriction de u à F. Montrer que v est une application linéaire bijective de F vers $\mathbf{R}^3$.

Exercice 2

1) Effectuer un développement limité à l'ordre 2 de $\ln(1 + x)$ pour x tendant vers 1.

2) Déterminer un équivalent de l'expression

$$\ln(1 + x) - (\ln 2)\sin(\frac{\pi}{2}x) - \sqrt{x} + 1$$

de la forme $C(x - 1)^2$ et valable pour x tendant vers 1, dans lequel C est une constante réelle à préciser.

3) Déterminer la limite éventuelle, quand x tend vers 1 ($x \neq 1$) de :

$$\frac{\ln(1 + x) - (\ln 2)\sin(\frac{\pi}{2}x) - \sqrt{x} + 1}{e^x - ex}.$$

Exercice 3
L'objectif de cet exercice est de déterminer (pas forcément de la façon la plus efficace) un équivalent pour x tendant vers l'infini de l'expression :

$$\operatorname{sh}(\sqrt{x^2+x}) - \operatorname{sh}(\sqrt{x^2-x}).$$

1) Montrer que pour tous p, q réels :

$$2\operatorname{ch}\left(\frac{p+q}{2}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{p-q}{2}\right) = \operatorname{sh} p - \operatorname{sh} q.$$

2) Montrer que :

$$\operatorname{ch} y \sim \frac{1}{2}e^y \qquad \text{quand } y \to +\infty.$$

3) Fournir des développements limités généralisés de $\sqrt{x^2+x}$ et de $\sqrt{x^2-x}$ valables pour x tendant vers $+\infty$ qui soient respectivement de la forme :

$$\sqrt{x^2+x} = x^a + b + o(1) \qquad \text{et}$$
$$\sqrt{x^2-x} = x^a - b + o(1)$$

dans lesquels a est un entier et b un réel qu'on précisera.
4) Déterminer la limite quand x tend vers $+\infty$ de :

$$\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}\,)\right).$$

5) Déterminer un équivalent simple quand x tend vers $+\infty$ de

$$\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}(\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}\,)\right).$$

6) Conclure.

Exercice 4
1) Montrer, en revenant à la définition de la continuité uniforme, que si f est une fonction uniformément continue de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$, la fonction $3f$ est également uniformément continue.

2) Montrer, en revenant à la définition de la continuité uniforme, que si f et g sont deux fonctions uniformément continues de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$, la fonction $f+g$ est également uniformément continue.