Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2010-2011

Math I - PMI

Feuille d'exercices n° 8

COMBINATOIRE

Exercice 1. Soit E un ensemble non vide.
Montrer que $\mathcal{F}(E, \mathbf{R})$ n'est pas de cardinal fini. Indication : montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, il existe une injection de $[\![1, n]\!]$ vers $\mathcal{F}(E, \mathbf{R})$.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbf{N}$ et E un ensemble fini de cardinal n.

1. (a) Montrer que $\mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$, $A \mapsto A^c$ est une bijection.

   (b) Calculer $S = \displaystyle\sum_{A \in \mathcal{P}(E)} |A|$ et en déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$.

   (c) Retrouver cette formule comme cas particulier de celle donnant, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1}$.

   Indication : dériver la formule de Newton.

2. Calculer $S' = \displaystyle\sum_{(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2} |A \cap B|$.

   Indication : remarquer que l'on a aussi $S' = \displaystyle\sum_{(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2} |A \cap B^c|$ et calculer $2S'$.

3. Calculer $\displaystyle\sum_{(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2} |A \cup B|$.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbf{N}$ et E un ensemble fini de cardinal n.

1. Calculer le cardinal de $\left\{ (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 \;\middle|\; A \subset B \right\}$.
2. Montrer que, pour tout $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$, on a : $A \subset B$ si et seulement si $A^c \cup B = E$.
3. En déduire le cardinal de $\left\{ (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 \;\middle|\; A \cup B = E \right\}$.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Calculer les cardinaux des ensembles

$$\left\{ (p, q) \in [\![1, n]\!]^2 \;\middle|\; p + q \leq n \right\} \qquad \text{et} \qquad \left\{ (p, q) \in [\![1, n]\!]^2 \;\middle|\; p + q = n \right\} .$$

Exercice 5. Soit $\alpha \in \mathbf{R} \setminus 2\pi\mathbf{Q}$.

1. Soit $N \in \mathbf{N}^\star$. On définit l'application $\varphi : \mathbf{N}^\star \to [\![1, N]\!]$ qui à $n \in \mathbf{N}^\star$ associe $j \in [\![1, N]\!]$ tel qu'il existe $\theta \in \left[\frac{2\pi(j-1)}{N}, \frac{2\pi j}{N}\right[$ tel que $n\alpha$ soit congru à θ modulo 2π.

   (a) Montrer que φ n'est pas injective.

   (b) En déduire qu'il existe $n_0 \in \mathbf{N}^\star$, $\theta_0 \in \left]-\frac{2\pi}{N}, \frac{2\pi}{N}\right[$ et $k_0 \in \mathbf{Z}$ tel que $n_0\alpha = \theta_0 + 2\pi k_0$.

(c) Montrer que $\theta_0 \neq 0$.

(d) Montrer que φ est surjective. Indication : distinguer selon le signe de θ_0.

(e) En déduire que, pour tout $\theta \in [0, 2\pi[$, il existe $n \in \mathbf{N}^\star$ et $k \in \mathbf{Z}$ tels que

$$|\theta + 2k\pi - n\alpha| \ \leq \ \frac{2\pi}{N} \ .$$

2. (a) Montrer que, pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, on a $|\sin\theta| \leq |\theta|$. Indication : utiliser $\sin\theta = \int_0^\theta \cos\theta' \mathrm{d}\theta'$.

   (b) Montrer que, pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, on a $|1 - \cos\theta| \leq \frac{1}{2}\theta^2$.

   (c) En déduire que, pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, on a $|e^{i\theta} - 1| \leq |\theta|$.

3. Montrer que, pour tout $\theta \in [0, 2\pi[$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbf{N}^\star$ tel que

$$|e^{i\theta} - e^{in\alpha}| \ \leq \ \varepsilon \ .$$