Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2010-2011

Math I - PMI

Feuille d'exercices n° 7

SUITES

Exercice 1.

1. Écrire l'énoncé qui traduit « La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est pas croissante. »
2. Cet énoncé est-il équivalent à « La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante. » ?

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle convergeant vers $\ell > 0$.
Montrer qu'il existe $N_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\forall n \in \mathbf{N}$, $N \geq N_0 \Longrightarrow u_n \geq \frac{\ell}{2}$.

Exercice 3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite complexe bornée et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergeant vers une limite $\ell \in \mathbf{C}$.

1. On suppose $\ell = 0$. Montrer que $(u_n\, v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0.
2. Qu'en est-il si $\ell \neq 0$?

Exercice 4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites réelles convergentes. Montrer que la suite $(\max(u_n, v_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge.

Exercice 5.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbf{Z}$. Montrer que (u_n) converge si et seulement si elle est stationnaire.
2. Soit $D \subset \mathbf{Z}$ un ensemble non vide et majoré. Montrer que D possède un plus grand élément.

Exercice 6. Déterminer pour les ensembles qui suivent s'ils possèdent des bornes supérieure et inférieure. Le cas écheant, donner ces bornes et décider si ce sont également des extrema.

1. $[0, 1[$
2. $\left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbf{N}^\star \right\}$
3. $\left\{ \frac{m}{mn+1} \;\middle|\; (m, n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^\star \right\}$
4. $\left[0, \sqrt{2}\right] \cap \mathbf{Q}$

Exercice 7.

1. Pour tout $\varepsilon > 0$, donner explicitement $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \geq n_0$, on ait :
$$\left| \frac{2n+1}{n+1} - 2 \right| \;\leq\; \varepsilon\ .$$
2. Pour tout $\varepsilon > 0$, donner explicitement $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \geq n_0$, on ait :
$$\left|(1 + e^{-n}) - 1\right| \;\leq\; \varepsilon\ .$$

3. Pour tout $\varepsilon > 0$, donner explicitement $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \geq n_0$, on ait :

$$\left|(1+e^{-n})\frac{2n+1}{n+1} - 2\right| \leq \varepsilon .$$

4. Pour tout $R \in \mathbf{R}$, donner explicitement $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \geq n_0$, on ait :

$$\frac{n}{2} \geq R .$$

Exercice 8. Soit (u_n) une suite réelle convergeant vers $\ell \in \mathbf{R}$. Montrer que (e^{u_n}) converge vers e^{ℓ}.

Exercice 9. *Suites arithmético-géométriques.*
Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $a \neq 1$ et $u^{(0)} \in \mathbf{R}$. On définit par récurrence $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que : $u_0 = u^{(0)}$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$.

1. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $\alpha = a\alpha + b$.
2. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}} = (u_n - \alpha)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite géométrique.
3. En déduire l'expression de u_n pour tout $n \in \mathbf{N}$.
4. Étudier la convergence de (u_n). Indication : on distinguera les cas $|a| < 1$, $|a| > 1$ et $a = -1$.
5. Calculer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la somme $\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Exercice 10. Soit $K > 0$, $\alpha > 1$ et $u^{(0)} \in \mathbf{R}_+^\star$. On définit par récurrence $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in (\mathbf{R}_+^\star)^{\mathbf{N}}$ telle que : $u_0 = u^{(0)}$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = Ku_n^\alpha$.

1. Montrer qu'il existe $L > 0$ tel que $L = KL^\alpha$.
2. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}} = \left(\frac{u_n}{L}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifie, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_{n+1} = v_n^\alpha$.
3. En déduire l'expression de u_n pour tout $n \in \mathbf{N}$.
4. Étudier la convergence de (u_n).

Exercice 11.

1. Soit $(a,b) \in (\mathbf{R}_+^\star)^2$. Montrer qu'il existe un unique $c \in \mathbf{R}$ tel que

   $$18ab - 3ac - bc = 0$$

   et que, de plus, $c > 0$.
2. Il existe donc une unique suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in (\mathbf{R}_+^\star)^{\mathbf{N}}$ vérifiant : $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$18u_nu_{n+1} - 3u_nu_{n+2} - u_{n+1}u_{n+2} = 0 .$$

   (a) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $v_n = \frac{1}{u_n}$. Vérifier que (v_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
   (b) En déduire une expression explicite de u_n pour tout $n \in \mathbf{N}$.
   (c) Discuter la convergence de (u_n).

Exercice 12.

1. Soit $a > 1$ et $\alpha \in \mathbf{R}$.
   (a) Montrer que, pour tout $1 < a' < a$, il existe $n_0 \in \mathbf{N}^\star$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$ tel que $n \geq n_0$ l'on a
   $$0 \leq \frac{(n+1)^\alpha}{a^{n+1}} \leq \frac{1}{a'} \frac{n^\alpha}{a^n} .$$
   (b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$.
2. Montrer de même que, pour tout $a \in \mathbf{R}$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.
3. (a) Montrer que pour tout $x \geq 1$ l'on a
   $$\ln x \leq \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}} \,\mathrm{d}t .$$
   (b) En déduire que, pour tout $\delta > 0$ et tout $x \geq 1$, l'on a
   $$\frac{\ln x}{x^\delta} \leq \frac{2}{\delta}\left(\frac{1}{\sqrt{x^\delta}} - \frac{1}{x^\delta}\right) .$$
   Indication : commencer par traiter le cas $\delta = 1$.
   (c) Montrer que, pour tout $\delta > 0$, si $(u_n) \in (\mathbf{R}_+^\star)^{\mathbf{N}}$ est une suite convergeant vers 0, alors (u_n^δ) converge vers 0.
   (d) En déduire, pour tout $\alpha > 0$ et tout $\beta > 0$, que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} = 0$.
   (e) Soit $a > 1$ et $\alpha \in \mathbf{R}$.
      i. Montrer que, pour tout $0 < \delta < \ln a$, il existe $n_0 \in \mathbf{N}^\star$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$ tel que $n \geq n_0$ l'on ait
      $$-n \ln a + \alpha \ln n \leq -\delta n .$$
      ii. Retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$.

Exercice 13. Étudier la convergence des suites suivantes :

1. $(u_n) = (n(-1)^n)$
2. $(u_n) = \left(\frac{(-1)^n}{n+1}\right)$
3. $(u_n) = \left(\frac{2n^6+5n+1}{n^6-1}\right)_{n\in\mathbf{N}\setminus\{0,1\}}$
4. $(u_n) = \left(\frac{2^n-3^n}{2^n+3^n}\right)$
5. $(u_n) = (\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1})$
6. $(u_n) = (\sqrt[n]{n})_{n\in\mathbf{N}^\star}$
7. $(u_n) = \left(2 + \frac{\sin(n)-4}{n^2}\right)_{n\in\mathbf{N}^\star}$
8. $(u_n) = (n^{\frac{1}{\ln n}})_{n\in\mathbf{N}\setminus\{0,1\}}$
9. $(u_n) = \left(\frac{(-5)^n+n}{3^n-1}\right)_{n\in\mathbf{N}^\star}$
10. $(u_n) = \left((-1)^n + \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbf{N}^\star}$

Exercice 14. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^4+k}}.$$

Exercice 15. On considère $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = 1 + \frac{(n+2)\,u_n}{2(n+1)}\ .$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Montrer que : $\forall n \geq 2,\ u_n \geq 2$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 4}$ est décroissante.
4. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 16. *Irrationalité de e.*

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ on pose $u_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} + \frac{1}{n.n!}$.

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.
2. Posons $e = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. Montrer que e est irrationnel.

Exercice 17. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{3^k}$.

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge. Indication : montrer qu'elle est de Cauchy.

Exercice 18. *La série harmonique.*

On considère (H_n) la suite définie par $H_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Étudier la monotonie de (H_n).
2. Montrer que, pour tout $m \in \mathbf{N}$, $H_{2^{m+1}} - H_{2^m} \geq \frac{1}{2}$.
3. En déduire que, pour tout $m \in \mathbf{N}$, $H_{2^m} \geq \frac{m}{2}$.
4. Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $H_n \geq \frac{1}{2}\left(\frac{\ln n}{\ln 2} - 1\right)$.
   Indication : comparer H_n à H_{2^m} où m est tel que $2^m \leq n$.
5. Étudier la convergence de (H_n).
6. Vérifier directement que la suite (H_n) n'est pas de Cauchy.

Exercice 19.

1. Montrer que : $\forall x \in [3,5]$, $3 \leq 3 + \frac{4}{x} \leq 5$.
2. On définit $\varphi : [3,5] \to [3,5],\ x \mapsto 3 + \frac{4}{x}$.
   (a) Déterminer l'ensemble des points fixes de φ.
   (b) Montrer que : $\forall x \in [3,5]$, $|\varphi(x) - 4| \ \leq\ \frac{|x-4|}{2}$.
3. On considère la suite $(u_n) \in [3,5]^{\mathbf{N}^\star}$ définie par $u_1 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $u_{n+1} = 3 + \dfrac{4}{u_n}$.
   (a) Montrer que (u_n) converge et donner sa limite ℓ.
   (b) Déterminer un entier $N \in \mathbf{N}^\star$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$ tel que $n \geq N$, u_n soit une valeur approchée de ℓ à 10^{-6} près.

Exercice 20. On considère $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto -x(1-x^2)$.

1. Montrer que, pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, on a : $f(x) - f(y) = (x-y)(-1+x^2+xy+y^2)$.
2. En déduire que $f_{|[-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}]}$ est décroissante et que $f([-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}]) \subset [-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}]$.
3. Déterminer l'ensemble des points fixes de $f_{|[-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}]}$.
4. Soit $u^{(0)} \in [-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}]$. On définit alors par récurrence $(u_n) \in [-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}]^{\mathbf{N}}$ par $u_0 = u^{(0)}$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Montrer que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones.
   (b) Montrer que (u_n) converge.
5. Montrer que, pour tout $0 < K < 1$, il existe $(x,y) \in [-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}]^2$ tel que $|f(x) - f(y)| > K|x-y|$.

Exercice 21. *Valeur d'adhèrence.*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes.

1. Soit $a \in \mathbf{C}$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
   (i) Il existe une sous-suite de (u_n) convergeant vers a.
   (ii) Pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $A_\varepsilon = \{\ n \in \mathbf{N} \mid |u_n - a| \leq \varepsilon\ \}$ est infini.
   (iii) $\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbf{N}, \exists n \geq N, |u_n - a| \leq \varepsilon$.

   Rappel : si l'une de ces propositions est vérifiée, on dit que a est une valeur d'adhérence.
2. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
   (i) La suite (u_n) converge.
   (ii) La suite (u_n) est bornée et possède au plus une valeur d'adhérence.
3. Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n) = (((-1)^n + 1)\, n)_{n\in\mathbf{N}}$.
4. Soit $f : \mathbf{C} \to \mathbf{R}$ une fonction telle que
   (i) pour tout $M \in \mathbf{R}_+$, $f^{-1}([-M,M])$ est borné ;
   (ii) $f^{-1}(\{0\})$ est un singleton ;
   (iii) f est continue, c'est-à-dire que, pour tout $\ell \in \mathbf{C}$, pour toute suite (z_n) convergeant vers ℓ, la suite $(f(z_n))$ converge vers $f(\ell)$.

   On suppose que $(f(u_n))$ converge vers 0. Montrer que (u_n) converge.

Exercice 22. *Limites inférieure et supérieure* [exercice de cours].

1. Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leq v_n$.
   (a) Montrer que si (v_n) est majorée alors (u_n) l'est aussi et
   $$\limsup_{n\to\infty} u_n \ \leq\ \limsup_{n\to\infty} v_n\ .$$
   (b) Montrer que si (u_n) est minorée alors (v_n) l'est aussi et
   $$\liminf_{n\to\infty} u_n \ \leq\ \liminf_{n\to\infty} v_n\ .$$
2. Soit (u_n) une suite réelle. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
   (i) La suite (u_n) converge.
   (ii) La suite (u_n) est bornée et il existe $\ell \in \mathbf{R}$ tel que $\limsup_{n\to\infty} |u_n - \ell| = 0$.
   (iii) La suite (u_n) est bornée et $\liminf_{n\to\infty} u_n = \limsup_{n\to\infty} u_n$.

Exercice 23. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}^\star}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on définit $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

1. (a) *Lemme de Cesàro.* On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ converge vers $\ell \in \mathbf{C}$.

   i. Montrer que, pour tout $(n, N) \in (\mathbf{N}^\star)^2$ tel que $n \geq N$, on a

   $$|S_n - \ell| \;\leq\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-1} |u_k - \ell| \;+\; \sup_{k\geq N} |u_k - \ell| \;.$$

   ii. En déduire que (S_n) converge aussi vers ℓ.

   (b) Montrer que la réciproque du résultat précédent est fausse.

2. On suppose que (u_n) est réelle et croissante.

   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on a, pour tout $N \in \mathbf{N}^\star$ tel que $N \geq n$,

   $$S_n \;\leq\; u_n \;\leq\; \frac{N}{N-(n-1)}S_N \;-\; \frac{n-1}{N-(n-1)}S_{n-1} \;.$$

   (b) En déduire que si (S_n) converge alors (u_n) converge.

3. (a) *Lemme de l'escalier.* On suppose que $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ converge vers $\ell \in \mathbf{C}$. Montrer que $(\frac{u_n}{n})_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers ℓ.

   (b) On suppose que (u_n) est à valeurs dans $\mathbf{R}_+^\star$ et que $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers $\ell > 0$.
   En admettant la continuité de la fonction ln, montrer que $(\sqrt[n]{u_n})$ converge vers ℓ.