

Feuille d'exercices n°6

NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1.

1. Calculer le module et un argument de $\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$.
2. Récrire sous forme trigonométrique $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^4$.

Exercice 2. On note $z_1 = \frac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1 + i$ puis l'on définit $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$.

1. Écrire z_1 , z_2 et z_3 sous forme trigonométrique.
2. En déduire des expressions de $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$.

Exercice 3.

1. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, déterminer une forme trigonométrique de $(1+i)^n$.
2. En déduire pour tout $n \in \mathbf{N}$ une expression simple de $(1+i)^n + (1-i)^n$.

Exercice 4.

1. Soit a et b deux nombres complexes.
 - (a) Montrer que $\operatorname{Re}(\bar{a}b) = \operatorname{Re}(\bar{b}a)$.
 - (b) Exprimer $\operatorname{Re}(\bar{a}b)$ à l'aide de formes trigonométriques de a et b , puis à l'aide des formes algébriques de a et b .
 - (c) Montrer que $|\operatorname{Re}(\bar{a}b)| \leq |a||b|$.
 - (d) Déterminer le cas d'égalité dans l'inégalité précédente et l'exprimer à l'aide de formes trigonométriques de a et b .
 - (e) Montrer que

$$|a+b|^2 = |a|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{a}b) + |b|^2.$$

- (f) Démontrer l'identité du parallélogramme

$$|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2).$$

2. Montrer que, pour tout $(a, b, z) \in \mathbf{C}^3$, on a :

$$|z-a|^2 \leq |z-b|^2 \quad \text{si et seulement si} \quad \operatorname{Re}\left(\overline{\left(z - \frac{a+b}{2}\right)}(b-a)\right) \leq 0.$$

Exercice 5. Soit $c \in \mathbf{C}$ tel que $|c| < 1$.

1. Montrer que, pour tout $z \in \mathbf{C}$, on a : $|z + c| \leq |1 + \bar{c}z|$ si et seulement si $|z| \leq 1$.
2. On note $D = \{ z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq 1 \}$ et $C = \{ z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1 \}$. Montrer que l'application

$$f : D \longrightarrow D, z \longmapsto \frac{z + c}{1 + \bar{c}z}$$

est une bijection telle que $f(C) = C$.

Exercice 6.

1. Pour tout $z \in \mathbf{C}^*$, exprimer $1/z$ sous forme algébrique.
2. Pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et tout $(c, d) \in \mathbf{R}^2$, déterminer l'ensemble des $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ vérifiant

$$\begin{cases} ax - by = c \\ bx + ay = d \end{cases} .$$

Exercice 7.

1. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, exprimer, pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.
Indication : utiliser la formule du binôme de Newton.
2. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ impair, exprimer, pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, $\cos(n\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$.
3. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ pair.
 - (a) Exprimer, pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, $\cos(n\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$, et faire de même en fonction de $\sin(\theta)$.
 - (b) Montrer que l'on ne peut exprimer $\sin(n\theta)$ ni en fonction de $\cos(\theta)$ seul, ni en fonction de $\sin(\theta)$ seul. Indication : exhiber $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbf{R}^2$ tel que $\sin(n\theta_1) \neq \sin(n\theta_2)$ mais $\cos(\theta_1) = \cos(\theta_2)$ (respectivement $\sin(\theta_1) = \sin(\theta_2)$).

Exercice 8. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $\theta \in \mathbf{R}$, calculer

$$\sum_{k=0}^n \cos(k\theta) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n \sin(k\theta) .$$

Exercice 9. Déterminer algébriquement les racines carrées respectives de $7 + 24i$ et $9 + 40i$.

Exercice 10.

1. Résoudre algébriquement en $z \in \mathbf{C}$ l'équation $z^2 = (1 + i)$.
2. En déduire des expressions de $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$.

Exercice 11. Résoudre en $z \in \mathbf{C}$ les équations suivantes :

1. $iz^2 + (1 - 5i)z + 6i - 2 = 0$;
2. $z^2 + 3z + 3 = 0$;
3. $z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0$.

Exercice 12. On cherche à résoudre en $z \in \mathbf{C}$ l'équation

$$z^3 + (1 - 3i)z^2 - (6 - i)z + 10i = 0 .$$

1. Déterminer une racine réelle z_0 de l'équation.
2. Pour tout $z \in \mathbf{C}$, factoriser $z - z_0$ en $z^3 + (1 - 3i)z^2 - (6 - i)z + 10i$.
3. Résoudre l'équation en $z \in \mathbf{C}$.

Exercice 13. Résoudre en $z \in \mathbf{C}$ les équations suivantes :

1. $z^3 = -8i$;
2. $z^5 - z = 0$;
3. $27(z - 1)^6 + (z + 1)^6 = 0$;
4. $z^2\bar{z}^7 = 1$;
5. $z^6 - (3 + 2i)z^3 + 2 + 2i = 0$.

Exercice 14. Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

1. Soit ω une racine n -ième de l'unité. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} (1 + \omega^k)^n$.
2. Calculer la somme des racines n -ièmes de l'unité.
3. Calculer le produit des racines n -ièmes de l'unité.

Exercice 15. Décrire les ensembles suivants :

1. $\{ z \in \mathbf{C} \mid z^2 + 2z - 3 \in \mathbf{R} \}$;
2. $\left\{ z \in \mathbf{C} \setminus \{-3\} \mid \left| \frac{z-3}{z+3} \right| < 2 \right\}$;
3. $\left\{ z \in \mathbf{C}^* \mid \left| 1 - \frac{1}{z} \right|^2 = 2 \right\}$.

Exercice 16. On note A le point d'affixe $4 + 2i$ et O celui d'affixe 0. Calculer les affixes des points B tels que le triangle OAB soit équilatéral.

Exercice 17. Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbf{C}$ tels que soient alignés les points d'affixes z , iz et i .

Exercice 18. On rappelle l'indentification canonique de \mathbf{R}^2 et de \mathbf{C} par l'application affixe et sa réciproque :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \rightarrow & \mathbf{C} \\ (x, y) & \mapsto & x + iy \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \rightarrow & \mathbf{R}^2 \\ z & \mapsto & (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) \end{array} .$$

1. Rappeler l'effet sur \mathbf{C} des transformations du plan suivantes :
 - (a) pour $a \in \mathbf{C}$, la translation du vecteur d'affixe a ;
 - (b) pour $(a, \lambda) \in \mathbf{C} \times \mathbf{R}$, l'homothétie de rapport λ et de centre d'affixe a ;
 - (c) pour $(a, \theta) \in \mathbf{C} \times \mathbf{R}$, la rotation d'angle θ et de centre d'affixe a ;
 - (d) pour $(a, \theta) \in \mathbf{C} \times \mathbf{R}$, la symétrie par rapport à un axe formant un angle θ avec l'axe réel et passant par un point d'affixe a .
2. Montrer que la composée de deux symétries est une translation ou une rotation.
3. Montrer que la composée de deux rotations est une translation ou une rotation.