Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2010-2011

Math I - PMI

Feuille d'exercices n^o 5

SUITES NUMÉRIQUES - COMPLEXES

---

1 Suites numériques

1.1 Existence et calculs de limites (un peu plus théorique)

Exercice 1. Montrer que pour tous réels a et b, $||a| - |b|| \leq |a - b|$. En déduire que si une suite u_n tend vers l, la suite $|u_n|$ tend vers $|l|$.

Exercice 2. (Suite arithmético-géométrique). Trouver le terme général de la suite (u_n) définie par la récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ où a et b sont deux réels.

Exercice 3. Montrer que toute suite réelle convergente est bornée.

Exercice 4. Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$, convergente. Montrer, en utilisant la définition, que (u_n) est constante à partir d'un certain rang.

Exercice 5. (Suites arithmétiques) Soit $r \in \mathbb{R}$ fixé et (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ fixé, et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3.
2. Calculer explicitement le terme général u_n en fonction de n.
3. La suite (u_n) est-elle monotone ? Si oui, préciser si elle est croissante ou décroissante en fonction du signe de r.
4. La suite est-elle convergente ? Bornée ?
   On définit la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ par $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.
5. Calculer le terme général v_n en fonction de n. La suite (v_n) est-elle convergente ?

Exercice 6. On étudie la convergence d'une suite géométrique de raison a.

1. i). Rappeler la formule du binôme de Newton.
   ii). Soit $a > 1$. En écrivant $a = 1 + b$, avec $b > 0$, montrer que $a^n \geq 1 + nb$.
   iii). En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$.
2. En déduire que si $0 \leq a < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$.
3. Si $a \geq 0$, conclure que (a^n) est convergente si et seulement si $0 \leq a \leq 1$.

Exercice 7. Soit u la suite réelle définie par récurrence en posant $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$, si $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que (u_n) est croissante et majorée.
2. Montrer que (u_n) converge vers un nombre réel positif l qui satisfait l'équation $l^2 - l - 1 = 0$ et calculer l.

Exercice 8.

1. Soit (u_n) une suite réelle.
   i). On suppose : $\exists\ n_0 \in \mathbb{N},\ k \in]0, 1[: \forall\, n \geq n_0,\ |u_{n+1}| \leq k|u_n|$. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

ii). On suppose : (u_n) est à valeurs positives et $\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ k > 1 : \forall\, n \geq n_0,\ u_{n+1} \geq k u_n$. Montrer que $u_n \longrightarrow +\infty$.

iii). Application : montrer que $\forall\, a \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$.

2. Généralisation : on considère (u_n) suite à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ telle que $(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ converge vers l.

   i). Si $l > 1$, $u_n \longrightarrow +\infty$.

   ii). Si $l < 1$ alors $u_n \longrightarrow 0$.

   Indication pour i) (respectivement pour ii)) : montrer qu'il existe $k > 1$ (respectivement $k < 1$), $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $\forall\, n \geq n_0,\ u_{n+1} \leq k u_n$ (respectivement $u_{n+1} \geq k u_n$)

Exercice 9. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = \sqrt{n^2+n} - n$ est convergente, et calculer sa limite (Indication : multiplier u_n par $\sqrt{n^2+n}+n$).

Exercice 10. Le théorème de Césaro

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle, on définit la suite (v_n) par $v_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

1. On suppose que (u_n) converge vers 0. Soit $\varepsilon > 0$.

   i). Justifier qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n > N,\ |u_n| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.

   ii). En déduire que $\forall\, n \geq N, \left|\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=N+1}^{n} u_k\right| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.

   iii). Montrer qu'il existe $N' \geq N :\ \forall n \geq N', \left|\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{N} u_k\right| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.

   iv). En déduire que $\forall\, n > N'$, $|v_n| \leq \varepsilon$, et conclure que (v_n) converge vers 0.

2. On suppose que (u_n) converge vers l, montrer que (v_n) converge vers l. Indication : considérer la suite $u_n - l$ et appliquer le 1).

3. Que peut on dire de v_n lorsque u_n tend vers $+\infty$?

4. Le lemme de l'escalier : soit (u_n) une suite telle que $(u_{n+1} - u_n)$ soit convergente de limite l. Montrer que $(\frac{u_n}{n})$ est convergente de limite l.

   Indication : appliquer le théorème de Césaro à la suite $(u_{n+1} - u_n)$.

1.2 Monotonie, Suites extraites, Critère de Cauchy

Exercice 11. Dans les cas suivants, la suite (u_n) est-elle monotone ? Sinon, a-t-elle des sous suites monotones ?

a). $u_n = (-1)^n$

b). $u_n = n + (-1)^n$

c). $u_n = n^2$

d). $u_n = n + 2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$, (on pourra calculer et comparer u_0, u_1, u_2, u_3).

Exercice 12. Montrer que toute suite réelle de Cauchy est bornée.

Exercice 13. Le nombre e :

On considère les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ définies par

$$u_n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n.\,n!}$$

a). Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes. On admettra que leur limite commune est e.

b). Montrer que e est irrationnel.

Indication : raisonner par l'absurde : on suppose que $e = \frac{p}{q}$, alors $u_q \leq e \leq v_q$, en utilisant le fait que $e.q!$ est entier, montrer que $e = u_q$ et expliquer en quoi c'est absurde.

Exercice 14.

a). Soit (u_n) telle que les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite l. Montrer qu'alors u_n converge vers l.

b). Soit (u_n) telle que (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) soient convergentes (cette fois sans hypothèse sur la valeur de leur limite). Montrer que les trois limites sont en fait égales, et que u_n converge vers cette limite.

Exercice 15. Soit (u_n) une suite réelle. On dit que le réel l est valeur d'adhérence de la suite s'il existe une suite extraite de (u_n) qui converge vers l.

1. Quelles sont les valeurs d'adhérence d'une suite convergente ?
2. Quelles sont les valeurs d'adhérence de la suite $(-1)^n$? de la suite $\cos(n\pi/3)$?
3. Donner un exemple de suite qui ne converge pas et qui possède une unique valeur d'adhérence.
4. Prouver que si (u_n) est bornée et divergente alors elle admet au moins deux valeurs d'adhérence distinctes.

Exercice 16. On définit la suite (u_n) par $u_n = \dfrac{\sin 1}{3} + \dfrac{\sin 2}{3^2} + \cdots + \dfrac{\sin n}{3^n}$. Montrer que la suite (u_n) est de Cauchy. Conclure.

Exercice 17. Série harmonique.

Soit (H_n) définie par $H_0 = 0$, et pour $n \geq 1$: $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Etudier la monotonie de H_n.
2. Montrer que $\forall\, m \in \mathbb{N},\ H_{2^{m+1}} - H_{2^m} \geq \frac{1}{2}$.
3. En déduire $H_{2^m} \geq \dfrac{m}{2} + 1$, puis $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $H_n \geq \dfrac{1}{2}\left(\log_2 n + 1\right)$.
   Indication : utiliser m tel que $m \leq \log_2 n \leq m+1$, et remarquer que pour m ainsi défini, $H_{2^m} \leq H_n$.
4. Conclure : la suite (H_n) tend vers $+\infty$.
5. Conclure directement en montrant que (H_n) n'est pas de Cauchy.

2 Nombres complexes : premiers exercices

2.1 Forme algébrique, forme trigonométrique

Exercice 18.

1. Calculer le module et l'argument de $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$.
2. Réécrire sous forme trigonométrique $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^4$.

Exercice 19. On note $z_1 = \dfrac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1+i$. On définit $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$.

1. Ecrire z_1, z_2 et z_3 sous forme trigonométrique.
2. En déduire des expressions de $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$.

Exercice 20.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer une forme trigonométrique de $(1+i)^n$.
2. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ une expression simple de $(1+i)^n + (1-i)^n$.

Exercice 21. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $|z-i| = |z+i|$ si et seulement si z est réel.

Exercice 22. Soient z et z' deux nombres complexes de module 1 tels que $zz' \neq -1$. Démontrer que $\dfrac{z+z'}{1+zz'}$ est réel, et préciser son module.

Exercice 23. Linéariser $\cos^5(x)$ et $\cos^2(x)\sin^3(x)$.

Exercice 24. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ ainsi que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$.

2.2 Equations, Racines carrées

Exercice 25. Résoudre en $z \in \mathbb{C}$ l'équation $e^z = 3\sqrt{3} - 3i$.

Exercice 26. Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants : $z_1 = 3 + 4i,\ z_2 = 8 - 6i$.

Exercice 27. Déterminer les racines carrées de $Z = \sqrt{3}+i$ sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique. En déduire la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 28. Résoudre les équations du second degré suivantes :

$$\textbf{1}.\ z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0 \qquad \textbf{2}.\ iz^2 + (4i-3)z + i - 5 = 0$$
$$\textbf{3}.\ z^2 - 2\overline{z} + 1 = 0.$$