Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2010-2011

Math I - PMI

Feuille d'exercices n° 4

RELATIONS

Exercice 1. Donner le graphe des relations suivantes :

1. l'égalité sur un ensemble E quelconque ;
2. l'ordre canonique sur $\mathbf{R}$.

Exercice 2. Examiner la réflexivité, la transitivité, la symétrie et l'antisymétrie des relations ci-dessous. Lorsque la relation est un ordre, déterminer s'il est total.

1. L'orthogonalité $\perp$ sur les droites de $\mathbf{R}^3$.
2. Le parallèlisme $\|$ sur les droites de $\mathbf{R}^3$.
3. La relation $<$ sur $\mathbf{R}$.
4. L'inclusion $\subset$ sur les parties d'un ensemble quelconque.
5. La divisibilité $|$ sur $\mathbf{N}$. On rappelle que, pour tout $(p,q) \in \mathbf{N}^2$, on note $p\,|\,q$ s'il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $q = kp$.

Exercice 3. Soit E et F deux ensembles et $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}(E,F)$. Pour tout $(a,b) \in E^2$, on note $a\,\mathcal{R}\,b$ si pour tout $f \in \mathcal{A}$ l'on a $f(a) = f(b)$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Soit $f \in \mathcal{A}$. Montrer que, pour toute classe $X \in E/\mathcal{R}$ et tout $(x,y) \in X^2$, on a $f(x) = f(y)$. On dit que f passe au quotient. On peut alors définir
$$\widetilde{f} : E/\mathcal{R} \to F, \quad X \mapsto f(x) \text{ pour n'importe quel } x \in X\ .$$
3. On suppose que $\mathcal{A}$ est un singleton $\{f\}$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in E$ l'on a $\bar{x} = f^{-1}(\{f(x)\})$.
   (b) Montrer que $\widetilde{f}$ est injective.
   (c) On suppose f surjective. Montrer que $\widetilde{f}$ est bijective.
4. Soit X un ensemble et $A \in \mathcal{P}(X)$. On s'intéresse au cas particulier où $E = \mathcal{F}(X,F)$ et
$$\mathcal{A} \;=\; \{\; E \to F,\ f \mapsto f(a) \mid a \in A \;\}\ .$$
   (a) Montrer que l'application $E \to \mathcal{F}(A,F)$, $f \mapsto f_{|A}$ passe au quotient.
   (b) Montrer que l'application associée $E/\mathcal{R} \to \mathcal{F}(A,F)$ est une bijection.

Exercice 4. Soit $(E, \mathcal{R})$ un ensemble ordonné. Montrer que $\emptyset$ possède une borne supérieure si et seulement si E possède un plus petit élément.

Exercice 5. Soit $(E, \mathcal{R})$ un ensemble ordonné non vide, I un ensemble non vide et deux familles $(a_i)_{i\in I} \in E^I$ et $(b_i)_{i\in I} \in E^I$ telles que, pour tout $i \in I$, l'on ait $a_i \mathcal{R} b_i$. On note

$$A = \{ a_i \,|\, i \in I \} \quad \text{et} \quad B = \{ b_i \,|\, i \in I \} \ .$$

On suppose que A et B possèdent des bornes supérieures. Les comparer.

Exercice 6. Soit E un ensemble non vide et $(F, \mathcal{R})$ un ensemble ordonné non vide. On définit sur $\mathcal{F}(E, F)$ la relation $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}$: pour tout $(f, g) \in \mathcal{F}(E, F)^2$, on note $f \,\mathcal{R}_{\mathcal{F}}\, g$ si pour tout $x \in E$ l'on a $f(x) \,\mathcal{R}\, g(x)$.

1. Montrer que $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}$ est une relation d'ordre.
2. On suppose que E et F possèdent au moins deux éléments. Montrer que $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}$ n'est pas total.
3. On suppose $\mathcal{R}$ total. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$ et tout $(f_1, \cdots, f_n) \in \mathcal{F}(E, F)^n$, l'ensemble $\{ f_i \,|\, i \in [\![1, n]\!] \}$ possède des bornes inférieure et supérieure.

Exercice 7. Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{R})$ un ensemble ordonné. On note $\mathcal{A}_\star = \bigcup_{n\in\mathbf{N}^\star} \mathcal{A}^n$ l'ensemble des mots de longueur finie sur l'alphabet $\mathcal{A}$. On définit une relation $\mathcal{R}_*$ sur $\mathcal{A}_\star$ par : pour tout $(k, l) \in (\mathbf{N}^\star)^2$ et tout $(a, b) = ((a_1, \cdots, a_k), (b_1, \cdots, b_l)) \in \mathcal{A}^k \times \mathcal{A}^l$, on note $a \,\mathcal{R}_\star\, b$ s'il existe $m \in [\![1, \min(\{k, l\})]\!]$ tel que $a_m \neq b_m$, $a_m \,\mathcal{R}\, b_m$ et $\forall i \in [\![1, m-1]\!]$, $a_i = b_i$ ou si $k \leq l$ et $\forall i \in [\![1, k]\!]$, $a_i = b_i$.

1. Montrer que $\mathcal{R}_\star$ est un ordre.
2. Montrer que $\mathcal{R}_\star$ est total si et seulement si $\mathcal{R}$ l'est.

Exercice 8. Dans cet exercice, on considère $\mathbf{R}$ muni de l'ordre canonique. Soit A une partie non vide de $\mathbf{R}$.

1. Montrer que $\emptyset$ ne possède pas de borne supérieure.
2. On note $-A = \{ -a \,|\, a \in A \}$.
   (a) Montrer que $\inf A$ existe si et seulement si $\sup -A$ existe et que dans ce cas $\inf A = -\sup -A$.
   (b) Montrer que $\sup A$ existe si et seulement si $\inf -A$ existe et que dans ce cas $\sup A = -\inf -A$.
3. Soit $B \subset A$ non vide.
   (a) On suppose A majoré. Montrer que B possède une borne supérieure et que $\sup B \leq \sup A$.
   (b) On suppose A minoré. Montrer que B possède une borne inférieure et que $\inf B \geq \inf A$.
4. Soit $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$. On note $\lambda A = \{ \lambda\, a \,|\, a \in A \}$.
   (a) Montrer que $\inf \lambda A$ existe si et seulement si $\inf A$ existe et que dans ce cas $\inf \lambda A = \lambda \inf A$.
   (b) Montrer que $\sup \lambda A$ existe si et seulement si $\sup A$ existe et que dans ce cas $\sup \lambda A = \lambda \sup A$.
5. On suppose $A \subset \mathbf{R}_+^\star$ et l'on note $B = \left\{ \frac{1}{a} \,\middle|\, a \in A \right\}$.
   (a) Montrer que $\sup B$ existe si et seulement si $\inf A$ existe et est strictement positif, et que dans ce cas $\sup B = 1/\inf A$.

(b) Montrer que B est minoré et déterminer $\inf B$.

6. Soit B une partie non vide de $\mathbf{R}$ telle que, pour tout $(a,b) \in A \times B$, l'on ait $a \leq b$. Montrer que $\sup A$ et $\inf B$ existent et vérifient $\sup A \leq \inf B$.
7. Soit B une partie non vide de $\mathbf{R}$. On note $A + B = \{\, a + b \,|\, (a,b) \in A \times B \,\}$.
   (a) On suppose A et B majorés. Montrer que $\sup A + B$ existe et vaut $\sup A + \sup B$.
   (b) On suppose A et B minorés. Montrer que $\inf A + B$ existe et vaut $\inf A + \inf B$.
8. Soit B une partie non vide de $\mathbf{R}$. On note $AB = \{\, ab \,|\, (a,b) \in A \times B \,\}$. On suppose A et B bornés.
   (a) Montrer que AB possède des bornes supérieure et inférieure.
   (b) On suppose $A \subset \mathbf{R}^+$ et $B \subset \mathbf{R}^+$. Montrer que
   $$\inf AB \;=\; \inf A \times \inf B \quad \text{et} \quad \sup AB \;=\; \sup A \times \sup B \;.$$
9. On suppose A bornée. Justifier son existence et déterminer le diamètre
   $$\delta(A) \;=\; \sup \left\{\, |x-y| \,\middle|\, (x,y) \in A^2 \,\right\} \;.$$

Exercice 9. On considère $\mathbf{N}$ ordonné par la divisibilité.

1. Déterminer le plus petit élément et le plus grand élément de $\mathbf{N}$.
2. Montrer que $\mathbf{N} \setminus \{0,1\}$ n'admet ni plus petit ni plus grand élément, mais admet des bornes supérieure et inférieure.

Exercice 10. Soit E un ensemble. On ordonne $\mathcal{P}(E)$ par l'inclusion. Montrer que tout $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ possède des bornes inférieure et supérieure et que

$$\inf \mathcal{A} \;=\; \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \quad \text{et} \quad \sup \mathcal{A} \;=\; \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \;.$$

Exercice 11. On note $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Pour $(a,b) \in \overline{\mathbf{R}}^2$, on note $a \mathcal{R} b$ si $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ et $a \leq b$ ou $b = +\infty$ ou $a = -\infty$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est un ordre total.
2. Montrer que toute partie non vide de $\overline{\mathbf{R}}$ possède des bornes supérieure et inférieure et les déterminer.