

Feuille d'exercices n° 4

RELATIONS - SUITES

1 Relations

Exercice 1. Soit $A = \{1, 2, 3, 4\}$. On considère la relation \mathcal{R} dont la graphe est :

$$G = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}.$$

Cette relation est-elle réflexive ? symétrique ? antisymétrique ? transitive ?

Exercice 2. Soit E , l'ensemble des nombres premiers strictement supérieurs à 2. On considère la relation \mathcal{R} entre deux éléments de E définie par :

$$p \mathcal{R} q \Leftrightarrow \frac{p+q}{2} \in E.$$

Est-ce une relation d'équivalence ?

Exercice 3. Soit p , un entier ; on définit dans \mathbb{Z} la relation \mathcal{R} par :

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y \text{ multiple de } p.$$

Vérifier que c'est une relation d'équivalence. Préciser la classe d'équivalence de 0. Combien y a-t-il de classes d'équivalence ?

Exercice 4. Dans \mathbb{R} , on définit la relation \mathcal{R} en posant pour $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow xe^y = ye^x.$$

Montrer que c'est une relation d'équivalence. Quelle est la classe d'équivalence de 0 ? En général, pour x fixé dans \mathbb{R} , combien y a-t-il d'éléments dans la classe de x ?

Exercice 5. Dans \mathbb{C} , on définit la relation \mathcal{R} en posant pour $(z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$:

$$z_1 \mathcal{R} z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|.$$

Montrer que c'est une relation d'équivalence. Quelles sont les classes d'équivalence ?

Exercice 6. Soit E une ensemble et A une partie de E . On définit dans $\mathcal{P}(E)$ la relation \mathcal{R} en posant pour tout couple $(X, Y) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$:

$$X \mathcal{R} Y \Leftrightarrow X \cap A = Y \cap A.$$

- Montrer que c'est une relation d'équivalence.
- On note \dot{X} la classe d'équivalence de X ; expliciter $\dot{\emptyset}$, \dot{E} , \dot{A} , \dot{A}^c .
- Montrer que $A \cap X$ est l'unique élément de \dot{X} contenu dans A .
- On définit l'application $f : \dot{X} \rightarrow A \cap X$ de $\mathcal{P}(E)/\mathcal{R}$ (ensemble de classes) dans $\mathcal{P}(A)$; montrer que f est bijective.

Exercice 7. Dans \mathbb{C} , on définit la relation \prec de la façon suivante : si $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ sont 2 complexes,

$$z_1 \prec z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 < x_2 \\ \text{ou} \\ x_1 = x_2 \text{ et } y_1 \leq y_2 \end{cases}$$

Vérifier qu'il s'agit d'une relation d'ordre total sur \mathbb{C} , compatible avec l'addition.

Exercice 8. Dans \mathbb{N} , on définit la relation \prec par :

$$n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}, n \prec m \Leftrightarrow n \text{ divise } m.$$

Vérifier qu'il s'agit d'une relation d'ordre sur \mathbb{N} ; est-il total? Quel est le plus petit et le plus grand élément?

Exercice 9. Un ensemble est dit "bien ordonné" si toute partie non vide admet un plus petit élément.

- Donner un exemple d'ensemble bien ordonné et un exemple d'ensemble qui ne l'est pas.
- Montrer que "bien ordonné" implique totalement ordonné, mais que la réciproque est fausse.

Exercice 10. Soit E un ensemble ordonné par la relation \leq . On définit sur $\mathcal{P}(E) \setminus \{0\}$ la relation \mathcal{R} par :

$$X \mathcal{R} Y \Leftrightarrow (X = Y \text{ ou } \forall x \in X, \forall y \in Y, x \leq y).$$

Vérifier que c'est une relation d'ordre.

2 Suites - Existence et calculs de limite

Exercice 11. Etudier la nature des suites suivantes, et déterminer leur limite éventuelle :

1. $u_n = \frac{\sin(n) + 3 \cos(n^2)}{\sqrt{n}}$
2. $u_n = \frac{2n + (-1)^n}{5n + (-1)^{n+1}}$
3. $u_n = \frac{n^3 + 5n}{4n^2 + \sin(n) + \ln(n)}$
4. $u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}, (a, b) \in]0, +\infty[.$

Exercice 12. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ n'est pas convergente.

Exercice 13. 1. Montrer que la suite $(x_n)_n$ définie par $x_n = \cos((n + \frac{1}{n})\pi)$ est divergente;

2. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n$ est un entier pair.
- (b) En déduire que la suite $\left(\sin((3 + \sqrt{5})^n \pi)\right)_n$ converge, et déterminer sa limite.