Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2010-2011

Math I - PMI

Feuille d'exercices n° 2

NOMBRES RÉELS - BORNE SUP - ENSEMBLES

---

1 Manipulation des nombres réels

Exercice 1. Soit x un nombre réel. Démontrer que pour tout entier $n \geq 2$:

$$[x > -1,\ x \neq 0] \Rightarrow [(1+x)^n > 1 + nx]\,.$$

Exercice 2. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. A-t-on équivalence entre les deux propositions suivantes ?

- $\exists \alpha > 0, \quad \forall x \in A, \quad x \geq \alpha.$
- $\forall x \in A, \quad x > 0.$

Exercice 3. Pour toutes les fonctions f suivantes, tracer l'allure des courbes de f, $|f|$, $f_+ = \max(f, 0)$ et $f_- = -\min(f, 0)$:
$f(x) = x^3 - 3\,x\,, \quad f(x) = \cos(x)\,, \quad f(x) = \ln(2\,x + 1)\,, \quad f(x) = \exp(-3\,x - 6).$

Exercice 4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que : $\big(\forall \varepsilon > 0,\ |x| \leq \varepsilon\big) \Rightarrow \big(x = 0\big)$.

Exercice 5. On considère un intervalle ouvert $I \subseteq \mathbb{R}$, et $x \in I$. Montrer la proposition suivante :

$$\forall x \in I, \quad \exists \varepsilon > 0, \quad]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset I.$$

La proposition suivante est-elle vraie ?

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall x \in I, \quad]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset I.$$

Exercice 6. Pour un nombre réel x, on notera $E(x)$ sa partie entière et $[x]$ sa partie fractionnaire.
Tracer l'allure des courbes des fonctions suivantes.
$E(x)\,, \quad E\left(\frac{1}{x}\right)\,, \quad E(x^2)\,, \quad E(\sin(x))\,, \quad [x]\,.$

Exercice 7.

1. Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ E(x) + E(y) \leq E(x + y) \leq E(x) + E(y) + 1.$
2. $\forall (x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z},\ E(x + n) = E(x) + n.$
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\},\ \forall x \in \mathbb{R}\ ,\ E(x) = E\left(\frac{E(n\,x)}{n}\right).$
4. Déterminer $\lim E(x)$ et $\lim [x]$ lorsque x tend vers -1_+ et lorsque x tend vers -1_-. Ces fonctions ont-elles une limite lorsque x tend vers -1 ?

Exercice 8. Soient $r \in \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

1. Montrer que $r + x \notin \mathbb{Q}$.
2. Montrer que, si $r \neq 0$, $r\,x \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 9. Soient x, $y \in \mathbb{Q}^+$, tels que $\sqrt{x}$ ou $\sqrt{y} \notin \mathbb{Q}$. Montrer que $\sqrt{x} + \sqrt{y} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 10. Dire si les énoncés suivants sont vrais ou faux :

1. $(x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}) \Rightarrow (x + y \in \mathbb{Q})$.

2. $(x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \Rightarrow (x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.
3. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ \forall y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ (x < y \Rightarrow \exists z \in \mathbb{Q},\ x < z < y)$.
4. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ \forall y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ (x < y \Rightarrow \exists z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ x < z < y)$.
5. $\forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq 3$ et n impair $) \Rightarrow \sqrt{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

2 Borne supérieure et inférieure

Exercice 11. Soient $A,\ B$ deux parties bornées de $\mathbb{R}$. On pose $A + B = \{x + y;\ x \in A,\ y \in B\}$. De même, on définit $A \cdot B = \{xy;\ x \in A, y \in B\}$.

– Montrer que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
– Comparer $\sup(A \cdot B)$ et $\sup(A) \cdot \sup(B)$.
– Montrer que $\sup\limits_{x,y \in A} |x - y| = \sup A - \inf A$.

Exercice 12. Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall x \in A, \quad \forall y \in B, \quad x < y.$$

Montrer que A admet une borne supérieure, et B admet une borne inférieure. Comparer $\sup A$ et $\inf B$.

Exercice 13. Donner, s'ils existent, le sup, l'inf, le maximum et le minimum des sous ensembles de $\mathbb{R}$ suivants :

$$[0;1],\ [0;1[,\ \mathbb{Q},\ \mathbb{Q} \cap [0;\sqrt{2}[,\ \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\},\ \{(-1)^n,\ n \in \mathbb{N}^*\},$$
$$\left\{(-1)^n + \frac{(-1)^{n+1}}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\},\ \left\{\frac{1+x}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}^+\right\}.$$

Exercice 14. Soit $J = \left\{x \in \mathbb{R};\ -2 < x + \frac{1}{2x} \leq 2\right\}$. L'ensemble J est-il un intervalle ? Déterminer, s'ils existent, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus petit et le plus grand élément de J.

Exercice 15. Soit $A = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Montrer que A possède une borne inférieure et une borne supérieure et les déterminer.

Exercice 16. Soit $A = \left\{\frac{m}{mn+1};\ m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.
Montrer que 1 est un majorant de A et que 0 est un minorant de A. Montrer que ce sont respectivement les bornes sup et inf de A. Le nombre 1 (resp 0) est il un max (resp min).
Reprendre l'exercice avec $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 17. Soient $A = \{x^2 + y^2; x, y \in \mathbb{R}\,,\ xy = 1\}$ et $B = \{xy;\ x, y \in \mathbb{R}$ et $x^2 + y^2 \leq 2\}$.
Donner, s'ils existent, le sup, l'inf, le maximum et le minimum de A et B.
Indications. Pour A, on pourra étudier la fonction $x \mapsto x^2 + \frac{1}{x^2}$. Concernant B, on posera $x = r\cos(\theta),\ y = r\sin(\theta)$ avec $0 \leq r \leq \sqrt{2},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

3 Ensembles

Exercice 18.
1. On note $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $B = \{0, 1, 2, 3\}$. Décrire les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$ et $A \times B$.
2. On note $A = [1;3]$ et $B =]2;4]$. Déterminer $A \cap B$ et $A \cup B$.
3. Déterminer $[3;8[\cap \mathbb{Z}$, $[-3;2[\cap \mathbb{N}$ et $]0;1[\cap \mathbb{Z}$.
4. Déterminer le complémentaire dans $\mathbb{R}$ des parties $]-\infty;0]$ et $[1;2[$.

5. Déterminer $]-2;3]\setminus\mathbb{Z}$, $]-2;3]\setminus[0;4]$ et $]-2;3]\setminus[-4;4]$.

Exercice 19. Soit E un ensemble et $(A,B,C)\in\mathcal{P}(E)^3$.

1. Montrer l'équivalence des propositions :
   (a) $A\subset B$;
   (b) $A\cap B=A$;
   (c) $A\cup B=B$;
   (d) $A\setminus B=\emptyset$.
2. Montrer l'équivalence des propositions :
   (a) $A\cup B=A\cap C$;
   (b) $B\subset A\subset C$.
3. Montrer l'implication
$$(A\cup B\subset A\cup C \quad \text{et} \quad A\cap B\subset A\cap C)\ \Rightarrow\ B\subset C\,.$$

Exercice 20. Soient A,B et C trois parties d'un ensemble E. Pour $X\subset E$, on note X^c le complémentaire de X dans E. Démontrer les propositions suivantes :

1. $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$;
2. $(A^c)^c=A$;
3. $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$;
4. $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$.

Exercice 21. Différence symétrique
Soit E un ensemble et A,B deux sous-ensembles de E. On appelle différence symétrique de A et B, notée $A\Delta B$, le sous-ensemble de E :
$$A\Delta B=\{x\in A\cup B\,;\,x\notin A\cap B\}.$$

1. Interpréter les éléments de $A\Delta B$.
2. Montrer que $A\Delta B=(A\cap(B^c))\cup(B\cap(A^c))$ où A^c désigne le complémentaire de A dans E.
3. Calculer $A\Delta A$, $A\Delta\emptyset$, $A\Delta E$, et $A\Delta(A^c)$.
4. Démontrer que pour tous sous-ensembles A,B,C de E, on a :
$$\begin{aligned}(A\Delta B)\cap C &= (A\cap C)\Delta(B\cap C)\,;\\ (A\Delta B)\cup C &= (A\cup C)\Delta(B\cup C).\end{aligned}$$

Exercice 22. Soit E un ensemble. On note $\mathcal{P}_\star=\mathcal{P}(E)\setminus\{\emptyset\}$. Déterminer
$$\bigcup_{x\in E}\{x\},\quad \bigcap_{x\in E}\{x\},\quad \bigcup_{A\in\mathcal{P}_\star}A \quad \text{et} \quad \bigcap_{A\in\mathcal{P}_\star}A\,.$$

Exercice 23. On note, pour tout $(i,j)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$, $A_{i,j}=[i-j;i+j]$. Déterminer
$$X=\bigcap_{i\in\mathbb{Z}}\bigcup_{j\in\mathbb{N}}A_{i,j} \qquad \text{et} \qquad Y=\bigcup_{j\in\mathbb{N}}\bigcap_{i\in\mathbb{Z}}A_{i,j}\,.$$

Exercice 24. Soit E un ensemble et $(A,B)\in\mathcal{P}(E)^2$.

1. Montrer l'équivalence des propositions :
   (a) $A \subset B$;
   (b) $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$.
2. Montrer que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
3. Montrer que $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$. Étudier le cas d'égalité.

Exercice 25. Soit E un ensemble et $(A, B, X) \in \mathcal{P}(E)^3$.

1. On suppose $B \subset A$. Montrer l'équivalence des propositions :
   (a) $A \cap X = B$;
   (b) il existe $Y \subset E \setminus A$ tel que $X = B \cup Y$.
2. On suppose $A \subset B$. Comme précédemment, résoudre en X l'équation $A \cup X = B$.