Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2010-2011

Math I - PMI

Feuille d'exercices n° 1

LOGIQUE ET RAISONNEMENT

Exercice 1.

1. Montrer la transitivité de l'implication, c'est-à-dire que pour des propositions P, Q, R,

$$((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)\,.$$

   Indication : faire une table de vérité.

2. Démontrer que si P et Q sont deux propositions $(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$.

Exercice 2. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $(6 < \frac{25}{4}) \Rightarrow (\sqrt{6} < \frac{5}{2})$.
2. $(2 = 3) \Rightarrow$ (4 est un nombre pair).
3. $(2 = 3) \Rightarrow (3 = 4)$.

Exercice 3. Soient P, Q et R trois propositions, donner la négation de :

1. P et (non Q ou R).
2. $(P \text{ et } Q) \Longrightarrow R$.

Exercice 4. Compléter, lorsque c'est possible, avec $\forall$ ou $\exists$ pour obtenir les énoncés vrais les plus forts.

1. $\ldots\, x \in \mathbf{R}$, $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$.
2. $\ldots\, x \in \mathbf{R}$, $x^2 + 3x + 2 = 0$.
3. $\ldots\, x \in \mathbf{R}$, $2x + 1 = 0$.
4. $\ldots\, x \in \mathbf{N}$, $x \leq \pi$.
5. $\ldots\, x \in \mathbf{R}$, $x^2 + 2x + 3 = 0$.

Exercice 5. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Lorsqu'elles sont fausses, énoncer leur négation.

1. $\exists x \in \mathbf{N}$, $x^2 > 7$.
2. $\forall x \in \mathbf{N}$, $x^2 > 7$.
3. $\forall x \in \mathbf{N}$, $\exists y \in \mathbf{N}$, $y > x^2$.
4. $\exists y \in \mathbf{N}$, $\forall x \in \mathbf{N}$, $y > x^2$.

Exercice 6. Écrire la négation des propositions suivantes :

1. $(x = 2)$ et $((x + y = 5)$ ou $(y \geq 3))$, où x et y sont des nombres réels.
2. $\forall x \in \mathbf{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in \mathbf{R}, |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$
3. $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$

Exercice 7. Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des étudiants de l'université Lyon 1, $\mathcal{S}$ l'ensemble des jours de la semaine et pour un étudiant x, $h_j(x)$ son heure de réveil le jour j.

1. Écrire avec des symboles mathématiques la proposition : « Tout étudiant de l'université Lyon 1 se réveille au moins un jour de la semaine avant 8h ».
2. Écrire la négation de cette proposition avec des symboles mathématiques puis l'énoncer en français.

Exercice 8. Écrire en français la proposition suivante ($\mathcal{P}$ désigne le plan et $\mathcal{D}$ l'ensemble des droites du plan).

$$\forall D \in \mathcal{D},\ \forall M \in \mathcal{P},\ M \notin D \implies \exists \Delta \in \mathcal{D},\ ((M \in \Delta) \text{ et } (D \cap \Delta = \emptyset))\,.$$

Exercice 9. Démontrer en faisant un raisonnement par contraposition que pour des réels x et y,

$$(x \neq y) \Rightarrow ((x + 1)(y - 1) \neq (x - 1)(y + 1))\,.$$

Exercice 10. Montrer que si n est un entier naturel non nul, alors $n^2 + 1$ n'est pas le carré d'un entier.

Exercice 11. Montrer que la proposition « $\forall n \in \mathbf{N}, 2^n + 3^n$ est un nombre premier » est fausse.

Exercice 12. Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ? Justifier vos assertions.

1. $\exists (x, y, z) \in \mathbf{Z}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, $x^2 + y^2 = z^2$.
2. $\forall (x, y, z) \in \mathbf{Z}^3$, $x^2 + y^2 = z^2$.

Exercice 13. On note $A = [0, 1]$. Examiner les propositions suivantes. Lorsqu'elles sont vraies, en donner une démonstration ; sinon, proposer un contre-exemple.

1. $\forall x \in A$, $\forall y \in A$, $(x + y) \in A$.
2. $\forall x \in A$, $\exists y \in A$, $(x + y) \in A$.
3. $\exists x \in A$, $\forall y \in A$, $(x + y) \in A$.

Exercice 14. Démontrer les propriétés suivantes :

1. pour tout entier $n \geq 4$, on a $n^2 \leq 2^n$;
2. pour toute fonction $j : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strictement croissante et tout $n \in \mathbf{N}$, on a $j(n) \geq n$.