Exercice 128
Donner une expression raisonnablement simple des dérivées des fonctions suivantes :

$$f(x) = \int_x^{x+1} \frac{e^t}{t}\, dt \qquad\qquad g(x) = \int_0^{x^2} [\mathrm{Arctan}(t+x)]^7\, dt.$$

Exercice 129
1) Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^2) dt$.
2) On pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \sqrt[n]{1+t^2} dt$ (pour $n \geq 1$). Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.
3) a) Soit $u > 0$. En introduisant la fonction auxiliaire φ_u définie par :

$$\varphi_u(t) = e^t - t - 1 + \frac{t^2}{u^2}(1 + u - e^u)$$

et en la considérant sur $[0, u]$ montrer l'existence d'un $d \in]0, u[$ tel que $\varphi_u''(d) = 0$.
b) En déduire l'inégalité :

$$|e^u - 1 - u| \leq \frac{1}{2} u^2 e^u.$$

d) En déduire que pour tout $t \in [0, 1]$,

$$|\sqrt[n]{1+t^2} - 1 - \frac{1}{n}\ln(1+t^2)| \leq \frac{1}{n^2}$$

puis trouver un équivalent de $u_n - 1$.

Exercice 130
Soit f de $[0, 1]$ vers $[0, 1]$ une application continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$. On suppose que :

$$\int_0^1 f(t)\, dt = f(1).$$

Montrer qu'il existe un c dans $]0, 1[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 131
On désigne par f une application continue de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}$. On suppose qu'il existe un nombre réel strictement positif k, tel que, pour tout x de $\mathbf{R}^+$, on ait :

$$0 \leq f(x) \leq k \int_0^x f(t)\, dt.$$

1) On définit l'application H de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}$ en posant, pour tout x de $\mathbf{R}^+$:

$$H(x) = e^{-kx} \int_0^x f(t)\, dt.$$

Montrer que H est dérivable sur $\mathbf{R}^+$ et calculer $H'(x)$ pour tout x de $\mathbf{R}^+$.
2) Montrer que pour tout x de $\mathbf{R}^+$, $H(x) = 0$.
3) En déduire que f n'est autre que l'application nulle de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}$.

Exercice 132
1) Soit u une fonction continue de $[0, 1]$ vers $\mathbf{R}$. On pose, pour tout x tel que $0 \leq x \leq 1$:

$$v(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^x u(t)\sqrt{\cos(\frac{\pi t}{2})}\, dt.$$

Montrer, en appliquant l'inégalité de Schwarz, que pour tout x de $[0,1]$,

$$[v(x)]^2 \leq \int_0^x [u(t)]^2 \, dt.$$

2) Soit u_0 une fonction continue de $[0,1]$ vers $\mathbf{R}$. Pour tout $n \geq 1$ et tout x de $[0,1]$, on pose :

$$v_{n-1}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^x u_{n-1}(t) \sqrt{\cos(\frac{\pi t}{2})} \, dt$$

$$\text{puis} \qquad u_n(x) = \sqrt{n} \, v_{n-1}(x)$$

a) On note $M = \underset{x \in [0,1]}{\text{Max}} [u_0(x)]^2$. Justifier pourquoi M existe.

b) En utilisant le 1) et en faisant une récurrence sur n, montrer que :

$$\text{pour tout } n \geq 0, \text{ pour tout } x \in [0,1], [u_n(x)]^2 \leq M x^n.$$

c) En déduire que la suite $\left(u_n \left(\frac{1}{2} \right) \right)_{n \geq 0}$ est convergente, et déterminer sa limite.

Exercice 133

On définit une application f de $[0,1]$ vers $\mathbf{R}$ par :

$$f(t) = \frac{t-1}{\ln t} \text{ pour } 0 < t < 1, \; f(0) = 0, \; f(1) = 1$$

et une application F de $]0,1[$ vers $\mathbf{R}$ par :

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} \, dt.$$

1) Montrer que f est continue en tout point de $[0,1]$.

2) Soit x dans l'intervalle $]0,1[$. Quel est le signe de $F(x)$?

3) Montrer que F est dérivable en tout point de $]0,1[$ et calculer sa dérivée.

4) a) Pour x dans l'intervalle $]0,1[$, montrer que

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} \, dt = \ln 2.$$

b) Pour x dans l'intervalle $]0,1[$, montrer que

$$x^2 \ln 2 \leq F(x) \leq x \ln 2.$$

c) En déduire l'existence et la valeur de la limite

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} F(x).$$

5) Montrer que $F(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0 (avec $x > 0$).

6) a) Montrer que quand ϵ tend vers 0 (avec $0 < \epsilon < 1$)

$$\int_\epsilon^{1-\epsilon} f(t) \, dt \quad \text{tend vers} \quad \int_0^1 f(t) \, dt.$$

b) Déduire de ce qui précède la valeur de $\int_0^1 f(t) \, dt$.

Exercice 134
Soit f la fonction d'une variable réelle définie par :

$$f(t) = \frac{t^2}{t^2 + \sin^2 t} \qquad \text{pour } t \neq 0 \text{ et } f(0) = \frac{1}{2}.$$

1) Montrer que f est une fonction continue. Est-elle dérivable ?

2) Déterminer la limite de f en $+\infty$ (sans présupposer son existence).

3) Pour tout x réel, on pose :

$$F(x) = \int_x^{2x} f(t)\,dt.$$

Montrer que cette fonction est dérivable sur $\mathbf{R}$, et expliciter sa dérivée. Montrer qu'elle est impaire.

4) Pour $x > 0$, montrer l'inégalité :

$$\int_x^{2x} \frac{t^2}{t^2+1}\,dt \leq F(x) \leq x$$

et en déduire que :

$$x - \operatorname{Arctan}(2x) + \operatorname{Arctan} x \leq F(x) \leq x.$$

Exercice 135
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,1]$ vers $\mathbf{R}$ telle que $f(1) = 0$.
Montrer que :

$$\int_0^1 \left[f'(t) + (\tan t) f(t)\right]^2\,dt = \int_0^1 \left[f'(t)\right]^2\,dt - \int_0^1 \left[f(t)\right]^2\,dt.$$

En déduire l'inégalité :

$$\int_0^1 \left[f(t)\right]^2\,dt \leq \int_0^1 \left[f'(t)\right]^2\,dt.$$

Exercice 136
Soit f l'application définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{t+x}\,dt.$$

1) Montrer que f est décroissante.

2) Montrer que f est dérivable et exprimer sa dérivée.

3) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

4) Montrer que f admet une limite quand x tend vers $+\infty$. Déterminer cette limite, puis fournir un équivalent simple de f en $+\infty$.

5) a) Montrer que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0^+.

b) Montrer que $f(x) + \ln x$ tend vers $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t - 1}{t}\,dt$ quand x tend vers 0^+.

c) En déduire un équivalent de f en 0^+.