Sommes de Riemann

Exercice 217
Déterminer les limites évenuelles des suites suivantes :
1) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}}$.
2) $u_n = \displaystyle\frac{1}{n^3} \sum_{k=2}^{n-1} k^2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
3) α et β étant deux réels strictement positifs donnés,

$$u_n = \frac{1}{n\alpha} + \frac{1}{n\alpha+\beta} + \frac{1}{n\alpha+2\beta} + \cdots + \frac{1}{n\alpha+(n-1)\beta}.$$

4) $u_n = \displaystyle\frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^{1/n}$.
5) $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k^2+n^2}$ puis $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k+\cos k}{k^2+n^2}$.

Exercice 218
Déterminer un équivalent simple de :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k^2-k}\, e^{k/n}.$$

Fractions rationnelles

Exercice 219
Décomposer en éléments simples sur $\mathbf{R}[X]$.
a) $\dfrac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2}$
b) $\dfrac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$
c) $\dfrac{1}{X(X-1)^2}$
d) $\dfrac{4}{(X^2-1)^2}$
e) $\dfrac{X^4-5X^3+10X^2-8X-1}{(X-1)^3(X-2)}$
f) $\dfrac{1}{X^n(X-1)}$
g) $\dfrac{4X}{(X-1)^2(X^2+1)^2}$
h) $\dfrac{16807}{(X-1)^5(X^2+2X+4)}$

Exercice 220
Soit P un polynôme complexe de degré n ayant n racines complexes distinctes notées $x_1, \ldots, x_n$.
On note a un complexe distinct de toutes les racines de P.
1) En utilisant des fractions rationnelles, montrer les formules :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k - a} = -\frac{P'(a)}{P(a)} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x_k-a)^2} = \frac{(P'(a))^2 - P(a)P''(a)}{(P(a))^2}.$$

2) On suppose que toutes les racines de P sont réelles. Montrer que $(P')^2 - PP''$ n'a pas de racines réelles.