Université Claude Bernard - Lyon 1 Printemps 2011
Math II - PMI Durée : 1 heure et 30 minutes

Partie commune - Devoir numéro 6

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si un étudiant est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Les exercices sont réputés indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. À l'intérieur d'un exercice, lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qu'il lui était demandé de démontrer

Exercice 1
On considère la fraction rationnelle A, à coefficients réels, définie par :

$$A = \frac{3X^6 + 6X^4 - 2X^3 + 4X^2 - X + 1}{X^3(X^2+1)^2}.$$

1) a) Écrire sous quelle forme se présente la décomposition en éléments simples de A sur $\mathbf{C}$.
   b) Écrire sous quelle forme se présente la décomposition en éléments simples de A sur $\mathbf{R}$.
2) Expliciter la décomposition en éléments simples de A sur $\mathbf{R}$.

Exercice 2
Pour tout entier $n \geq 1$ et tout entier $p \geq -1$, on note $A_{n,p}$ la matrice (n,n) à coefficients entiers de terme général $(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$ défini par :

$$a_{i,j} = \binom{i+j+p}{i-1}.$$

(La notation ci-dessus désigne le coefficient binomial "$i-1$ parmi $i+j+p$").
1) a) Expliciter la matrice $A_{2,-1}$ puis calculer son déterminant.
   b) Expliciter la matrice $A_{3,0}$ puis calculer son déterminant.
   c) Expliciter la matrice $A_{4,-1}$ puis calculer son déterminant.
2) a) Montrer que pour tous $n \geq 2$ et $p \geq -1$:

$$\det A_{n,p} = \det A_{n-1,p+1}.$$

   b) Pour $n \geq 0$, déterminer $\det A_{n,-1}$.

Exercice 3

1) Justifier de l'existence dans $\mathbf{R}$ de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

2) Montrer que, quand n tend vers $+\infty$,

$$\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,dt \to \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt.$$

3) a) Montrer que pour tout réel $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.

b) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $u \geq -n$,

$$\left(1+\frac{u}{n}\right)^n \leq e^u.$$

c) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $t \in [0, \sqrt{n}]$:

$$\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \frac{1}{\left(1+\dfrac{t^2}{n}\right)^n}.$$

d) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1+\dfrac{t^2}{n}\right)^n}\,dt.$$

Pour tout $n \geq 0$, on note, dans toute la suite de l'exercice :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n\theta\,d\theta.$$

On admettra sans chercher à le démontrer que quand n tend vers l'infini :

$$I_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

4) En effectuant le changement de variable $\theta = \operatorname{Arcsin}\frac{t}{\sqrt{n}}$ dans l'intégrale de gauche au 3 d) et le changement de variable $\theta = \operatorname{Arctan}\frac{t}{\sqrt{n}}$ dans l'intégrale de droite, prouver l'encadrement :

$$\sqrt{n}\,I_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,dt \leq \sqrt{n}\,I_{2n-2}$$

5) Conclure en fournissant la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.