Université Claude Bernard - Lyon 1 — Printemps 2011

Math II - PMI — Durée : 1 heure et 30 minutes

Partie commune - Devoir numéro 4

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si un étudiant est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Les exercices sont réputés indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. À l'intérieur d'un exercice, lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qu'il lui était demandé de démontrer

Exercice 1

On note B et P les matrices suivantes, à coefficients réels :

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer P^{-1}.

2) Pour a et b réels, calculer les produits $B\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $P\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ et $P\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$, et en déduire les coefficients de la matrice $P^{-1}BP$.

3) Pour tout $n \geq 1$, expliciter B^n.

Exercice 2

On note A la matrice, à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -4 & -4 \end{pmatrix},$$

et f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice est A dans la base canonique.
On note $E_0 = \operatorname{Ker} f$, $E_1 = \{v \in \mathbf{R}^3 \mid f(v) = v\}$ et $E_2 = \{v \in \mathbf{R}^3 \mid f(v) = 2v\}$.

1) a) Montrer que E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ (on admettra sans en écrire la preuve que E_2 est également un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$).

b) Déterminer les dimensions $\dim E_0$, $\dim E_1$ et $\dim E_2$.

c) Dans la suite de l'exercice, on note e_0 un vecteur non nul de E_0, e_1 un vecteur non nul de E_1 et e_2 un vecteur non nul de E_2. Montrer que (e_0, e_1, e_2) est une base de $\mathbf{R}^3$, et écrire la matrice de f dans cette base.

2) Dans toute la suite de l'exercice, on note g un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ qui vérifie :

$$g \circ f = f \circ g.$$

a) Montrer que $g(E_0) \subset E_0$, $g(E_1) \subset E_1$ et $g(E_2) \subset E_2$.

b) Montrer que la matrice de g dans la base (e_0, e_1, e_2) est diagonale. On la notera B dans la suite de l'exercice.

3) Pour λ μ et ν réels, on note :

$$h_{\lambda,\mu,\nu} = \lambda f^2 + \mu f + \nu Id.$$

a) Écrire la matrice $C_{\lambda,\mu,\nu}$ de $h_{\lambda,\mu,\nu}$ dans la base (e_0, e_1, e_2).

b) Montrer qu'il existe des valeurs de λ, μ et ν pour lesquelles $C_{\lambda,\mu,\nu} = B$, et en déduire que pour ces valeurs :

$$g = \lambda f^2 + \mu f + \nu Id.$$

Exercice 3

1) Vérifier que pour tout $\varphi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$:

$$1 + \sin(2\varphi) = (1 + \tan\varphi)^2 \cos^2\varphi.$$

2) En effectuant le changement de variable $t = \tan\varphi$, calculer :

$$\int_0^{\pi/4} \frac{d\varphi}{1 + \sin(2\varphi)}.$$

Exercice 4

Pour tout x réel, on pose :

$$G(x) = \int_0^x e^{t^2}\, dt \qquad \text{et} \qquad H(x) = e^{-x^2} G(x).$$

1) Calculer G' et montrer que la fonction G est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.

2) Montrer que H est solution de l'équation différentielle ci-dessous, où l'inconnue est y, fonction dérivable de la variable réelle x :

$$y' + 2xy = 1.$$

3) Dans cette question, on note F la fonction définie sur $\mathbf{R}^*$ par :

$$F(x) = \frac{e^{x^2}}{2x}.$$

a) Calculer la fonction dérivée F'.

b) Montrer que pour tout $x \geq 0$:

$$0 \leq \int_0^{x/2} e^{t^2}\, dt \leq \frac{x}{2} e^{x^2/4}.$$

c) Montrer que pour tout $x > 0$ et tout $t \in [\frac{x}{2}, x]$:

$$e^{t^2}\left(1 - \frac{2}{x^2}\right) \leq e^{t^2} - \frac{e^{t^2}}{2t^2} \leq e^{t^2}.$$

d) En déduire que pour tout $x > 0$:

$$\left(1 - \frac{2}{x^2}\right) \int_{x/2}^x e^{t^2}\, dt \leq F(x) - F(x/2) \leq \int_{x/2}^x e^{t^2}\, dt.$$

e) Montrer que pour tout $x > \sqrt{2}$:

$$F(x) - \frac{e^{x^2/4}}{x} \leq G(x) \leq \frac{x}{2} e^{x^2/4} + \frac{F(x)}{1 - 2/x^2}.$$

f) Montrer que $G(x) \sim F(x)$ quand x tend vers $+\infty$.