Produit vectoriel

L1 – PMI

23 novembre 2010

1 Aire algébrique d'un parallélogramme dans le plan

Dans un plan (affine euclidien), on choisit un repère orthonormé (O, u, v). On oriente le plan en décrétant que cette base est directe.

1.1 Aire géométrique

Considérons un parallélogramme $ABCD$ non aplati dans ce plan. Notons α_0 une mesure de l'angle géométrique $\widehat{BAD}$: c'est un réel strictement compris entre 0 et π. Notons H le projeté orthogonal de B sur la droite (AB) (faire un dessin !). Alors on a : $DK = AD \sin \alpha_0$. Si on considère le segment $[AB]$ comme la "base" du parallélogramme, la "hauteur" correspondante est $[AK]$ donc l'aire du parallélogramme est :

$$\mathcal{A} = AB \cdot AK = AB \cdot AD \cdot \sin \alpha_0.$$

D'autre part, on retrouve l'expression du produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HD}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = \overline{AH} \cdot \overline{AB}.$$

En utilisant la relation $AH = AD \cos \alpha_0$, on obtient :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \cdot AD \cdot \cos \alpha_0.$$

Passons en coordonnées. Notons (x_1, y_1) les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et (x_2, y_2) celles de $\overrightarrow{AD}$. Soit $z_1 = x_1 - iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$. Dans $\mathbf{C}$, le module d'un produit est le produit des modules, ce qui donne :

$$AB^2 AD^2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 = |z_1 z_2|^2 = (x_1 x_2 + y_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2.$$

On reconnaît dans le premier terme l'expression analytique du produit scalaire :

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \cdot AD \cdot \cos \alpha_0.$$

On en déduit :

$$|x_1 y_2 - x_2 y_1| = \sqrt{AB^2 AD^2 - (x_1 x_2 + y_1 y_2)^2} = \sqrt{AB^2 AD^2 (1 - \cos^2 \alpha_0)},$$

si bien que l'on a :

$$\mathcal{A} = AB \cdot AD \cdot \sin \alpha_0 = |x_1 y_2 - x_2 y_1|.$$

On va maintenant "enlever" la valeur absolue.

1.2 Aire algébrique

On définit le déterminant de deux vecteurs u et v dans la base orthonormée (i, j) par :

$$\det(u,v) \overset{\text{notation}}{=} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \overset{\text{déf.}}{=} x_1y_2 - x_2y_1, \qquad \text{où } u\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \text{ et } v\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

On vient de montrer que l'aire du parallélogramme $ABCD$ est la valeur absolue du déterminant $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$. Il est clair que le déterminant de deux vecteurs est nul SSI l'aire du parallélogramme correspondant est nulle SSI les vecteurs sont colinéaires. On peut démontrer que le déterminant ne change pas si on remplace la base (i, j) par une autre base orthonormée qui a la même orientation.

Par définition, l'aire algébrique $\mathcal{A}_{\text{alg}}$ d'un parallélogramme $ABCD$ est le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ calculé dans une base orthonormée. C'est donc l'aire habituelle munie d'un signe. Le signe est positif si la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est directe, ce qui signifie moralement que « pour aller de $\overrightarrow{AB}$ à $\overrightarrow{AD}$, il faut tourner dans le même sens que pour aller de u à v. » Le signe est négatif si la base est indirecte.

Si α est une mesure de l'angle orienté de vecteurs $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}})$ –on a alors $\alpha \equiv \pm\alpha_0\,[2\pi]$– alors (vérifier !) :

$$\mathcal{A}_{\text{alg}} = x_1y_2 - y_1x_2 = AB \cdot AD \cdot \sin\alpha.$$

2 Produit vectoriel dans l'espace

Dans l'espace (euclidien orienté), on choisit un repère orthonormé direct (O, i, j, k) (les trois vecteurs sont deux à deux orthogonaux et de norme 1).

2.1 Bases directes et indirectes

J'extrais le texte ci-dessous de Wikipedia. On verra à la fin de l'année des définitions plus formelles.

« On dit que deux bases définissent la même orientation si, par rotation autour d'un axe, on peut les superposer. De nouveau, deux types d'orientation sont possibles. Une base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ étant donnée, changer un vecteur en son opposé ou permuter deux vecteurs modifie l'orientation du plan. Opérer une permutation circulaire des trois vecteurs ne change pas l'orientation : $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ et $(\overrightarrow{k}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ définissent la même orientation.

La culture, ici aussi, a privilégié un sens appelé direct : celui correspondant au vissage d'une vis ou d'un tire-bouchon. La base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est dite directe si, en tournant de $\overrightarrow{i}$ vers $\overrightarrow{j}$, la vis ou le tire-bouchon s'enfonce dans la direction $\overrightarrow{k}$. C'est ainsi que l'orientation (haut, droite, devant) est directe et permet accessoirement de distinguer la droite et la gauche. C'est la même orientation directe que l'on trouve avec la *règle des trois doigts de la main droite* : le triplet (pouce, index, majeur) définit une orientation directe. On voit donc que le choix d'une orientation est liée à la notion de droite et de gauche. »

2.2 Définition géométrique

Étant donné deux vecteurs u et v de l'espace, on définit leur produit vectoriel comme le vecteur $u \wedge v$ ayant les propriétés suivantes :

- si u et v sont colinéaires, $u \wedge v$ est le vecteur nul ;
- sinon, on choisit un point A, on construit deux points B et D tels que $\overrightarrow{AB} = u$ et $\overrightarrow{AD} = v$, on construit un point C tel que $ABCD$ soit un parallélogramme ; alors,
  - $u \wedge v$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$,
  - la norme de $u \wedge v$ est l'aire (géométrique) du parallélogramme $ABCD$,
  - le sens de $u \wedge v$ est choisi de sorte que la base $(u, v, u \wedge v)$ soit directe.

Faites un dessin ! On cherche un point M tel que $\overrightarrow{AM} = u \wedge v$. La première condition fixe une droite à laquelle appartient M (perpendiculaire commune aux deux droites (AB) et (AD)), la deuxième détermine deux points sur cette droite (par la donnée de la distance AM), la troisième permet de choisir entre ces deux points.

2.3 Définition analytique

Dans la base (i, j, k) de référence, on écrit les coordonnées des vecteurs $u = \overrightarrow{AB}$ et $v = \overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Alors les coordonnées de leur produit vectoriel sont :

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ -x_1 z_2 + z_1 x_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}.$$

On ne va vérifier cette formule que dans le cas particulier où $z_1 = z_2 = 0$. On verra un jour en cours la preuve en général. Dans le cas particulier, la formule est presque évidente. Notons w le vecteur de coordonnées $(0, 0, x_1 y_2 - y_1 x_2)$:

- les deux premières coordonnées du vecteur w sont nulles donc le vecteur est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$,
- la norme du vecteur est $|x_1 y_2 - y_1 x_2|$, qui est bien l'aire du parallélogramme,
- en distinguant deux cas selon le signe, on se convainc que la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, w)$ est directe.

Pour en déduire la formule en général, on pourrait utiliser le fait qu'elle est « la même » dans toute base orthonormée directe (de même que, dans le plan, le produit scalaire de deux vecteurs s'exprime par $x_1 x_2 + y_1 y_2$ dans toute base orthonormée) et constater qu'il existe une base orthonormée directe dans laquelle les coordonnées z des deux vecteurs sont nulles.

Moyen mnémotechnique. On récrit les deux premières lignes sous les vecteurs :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ -x_1 z_2 + z_1 x_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{matrix}$$

2.4 Propriétés formelles et utiles

On a les propriétés suivantes, pour tous vecteurs u, v et w :

1. le vecteur $u \wedge v$ est nul SSI u et v sont colinéaires,
2. $u \wedge v = -v \wedge u$,

3. $u \wedge (v + w) = (u \wedge v) + (u \wedge w)$ et $(u + v) \wedge w = (u \wedge w) + (v \wedge w)$,
4. $u \wedge (v \wedge w) = (u \wedge v) \wedge w + v \wedge (u \wedge w)$,
5. le produit scalaire $(u \wedge v) \cdot w$ est le volume du parallélépipède "engendré" par (u, v, w) (au même sens qu'un couple de vecteurs dans un plan "engendre" un parallélogramme, voir ci-dessus).

La propriété 1 résulte de la définition géométrique. Les propriétés 2 à 4 se démontrent facilement en écrivant les coordonnées de tous les vecteurs.

Démontrons la propriété 5. Faire un dessin s'impose ! Le volume du parallélépipède est le produit de l'aire de la « base » engendrée par u et v par la « hauteur » correspondant à w. L'aire du parallélogramme engendré par u et v est la norme du produit vectoriel $u \wedge v$. D'autre part, notons θ l'angle formé par le vecteur w et le plan engendré par u et v. La « hauteur » est donc $||w|| \sin\theta$, où $||w||$ désigne la norme de w. C'est donc aussi $||w|| \cos(\pi/2 - \theta)$. Mais l'angle $\pi/2 - \theta$ est l'angle des vecteurs w et $u \wedge v$, si bien que le volume cherché est $||w|| \cdot ||u \wedge v|| \cdot \cos(\pi/2 - \theta)$: c'est bien la valeur absolue du produit scalaire $w \cdot (u \wedge v)$.

Notons une application du produit vectoriel. Dans un repère orthonormé fixé (O, i, j, k) du plan, on cherche la droite d'intersection Δ des plans d'équations :

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d, \end{cases}$$

où (a, b, c) et (a', b', c') sont des triplets non nuls de réels et d, d' sont d'autres réels. Soit u et u' les vecteurs de coordonnées (a, b, c) et (a', b', c'). On suppose qu'ils ne sont pas colinéaires.

Le premier plan est parallèle au plan d'équation $ax + by + cz = 0$, équation qui signifie que $\overrightarrow{OM}$ est orthogonal à u (car $ax + by + cz$ est le produit scalaire de $\overrightarrow{OM}$ et u). Un vecteur directeur de Δ doit donc être orthogonal à u et u' : le produit vectoriel $u \wedge u'$ en est un !