Université Claude Bernard - Lyon 1 | Printemps 2011
Math II - PMI/CCP | Durée : 1 heure et 30 minutes

Problème - Devoir numéro 1

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si un étudiant est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qu'il lui était demandé de démontrer.

Dans tout le problème, on note $u^{(n)}$ la dérivée n-ème d'une fonction u (au moins) n fois dérivable, et on convient que $u^{(0)} = u$ pour toute fonction.

Première partie : calcul des dérivées d'Arcsinus en 0

Dans toute la suite du problème, on notera f la fonction définie sur $]-\infty, 1[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ et g la fonction définie sur $]-1,1[$ par $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

1) Justifier pourquoi f et g sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leurs ensembles de définition respectifs.
Dans toute la suite du problème, on notera, pour tout $n \geq 0$:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \qquad \text{et} \qquad b_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!}.$$

2) a) Soit α un réel fixé. Pour $t > 0$, on note $\varphi_\alpha(t) = t^\alpha$.
Montrer que pour tout $n \geq 0$ et tout $t > 0$, $\varphi_\alpha^{(n)}(t) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)t^{\alpha-n}$.

b) Pour $n \geq 0$, donner une expression simple de $f^{(n)}(x)$, valable pour tout x dans $]-\infty, 1[$.

c) Déduire de cette expression que pour tout $n \geq 0$:

$$a_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}.$$

3) a) Soit u une fonction dérivable définie sur $]-1,1[$. Montrer que si u est paire, alors u' est impaire et que si u est impaire, alors u' est paire.

b) En déduire que la fonction $g^{(n)}$ est paire si n est pair, et qu'elle est impaire si n est impair.

c) Calculer b_{2k+1} pour tout $k \geq 0$.

4) Soit $k \geq 0$ fixé.

a) En appliquant le théorème de Taylor-Young d'une part à la fonction f à l'ordre k et d'autre part à la fonction g à l'ordre $2k$, prouver les deux énoncés suivants :

$$\frac{f(x^2) - a_0 - a_1 x^2 - a_2 x^4 - \cdots - a_k x^{2k}}{x^{2k}} \to 0 \text{ quand } x \to 0\,(x \neq 0)$$

$$\text{et} \quad \frac{g(x) - b_0 - b_2 x^2 - b_4 x^4 - \cdots - b_{2k} x^{2k}}{x^{2k}} \to 0 \text{ quand } x \to 0\,(x \neq 0).$$

b) En déduire que pour tout entier $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$, $b_{2i} = a_i$ et en particulier que $b_{2k} = a_k$.

5) Soit $n \geq 1$ fixé.
Montrer que $\mathrm{Arcsin}^{(n)}(0) = (n-1)!\, b_{n-1}$. Au vu des questions précédentes, conclure en donnant une expression raisonnablement simple de $\mathrm{Arcsin}^{(n)}(0)$ (qui dépendra de la parité de n).

Deuxième partie : dénombrement de parenthésages (les "nombres de Catalan")

Dans la suite du problème on note h l'application définie sur $]-\infty, \frac{1}{4}[$ par :

$$h(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2}.$$

6) Justifier pourquoi h est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Dans la suite du problème, on notera, pour tout $n \geq 0$:

$$c_n = \frac{h^{(n)}(0)}{n!}.$$

7) Montrer que la fonction h satisfait en tout point x de son ensemble de définition à l'identité :

$$(*) \qquad [h(x)]^2 = h(x) - x.$$

8) Dans cette question, on utilisera sans le démontrer le théorème suivant, dit "formule de Leibniz" : Soit $n \geq 0$ un entier, et soit u et v deux fonctions (au moins) n fois dérivables à valeurs réelles, définies sur un même intervalle de $\mathbf{R}$. La dérivée n-ème de leur produit uv est donnée par :

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

Soit $n \geq 2$. En dérivant l'identité $(*)$, montrer la relation :

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k}.$$

Dans la suite du problème, pour tout $n \geq 1$, on note d_n le nombre de façons de mettre des parenthèses pour calculer un produit de n termes vis-à-vis d'une opération non supposée associative. Pour clarifier ce que ça signifie, voici les façons de calculer un produit de quatre termes $abcd$: on peut faire les calculs des 5 façons suivantes :

$$a(b(cd)) \text{ ou } a((bc)d) \text{ ou } (ab)(cd) \text{ ou } (a(bc))d \text{ ou } ((ab)c)d,$$

et donc $d_4 = 5$.

(Pour les petites valeurs de n, il convient de considérer que $d_1 = 1$ et $d_2 = 1$.)

9) Montrer que pour tout $n \geq 2$:

$$d_n = \sum_{k=1}^{n-1} d_k d_{n-k}.$$

10) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $c_n = d_n$.

11) a) À partir d'une relation simple entre h' et f, montrer que pour tout $n \geq 1$:

$$c_n = \frac{4^{n-1}}{n} a_{n-1}.$$

b) Déduire de tout ce qui précède que pour tout $n \geq 1$,

$$d_n = \binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n-2}.$$