Université Claude Bernard - Lyon 1 — Printemps 2011

Math II - PMI — Durée : 1 heure et 30 minutes

Partie commune - Devoir numéro 1

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si un étudiant est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Les exercices sont réputés indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. À l'intérieur d'un exercice, lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qu'il lui était demandé de démontrer

Exercice 1

1) Rappeler la formule qui permet d'exprimer $\tan(\alpha+\beta)$ en fonction de $\tan(\alpha)$ et $\tan(\beta)$ (pour des angles α et β où ces trois tangentes sont définies).

2) Montrer qu'il existe un et un seul réel x solution de l'équation suivante :

$$(1) \qquad 4\,\mathrm{Arctan}\, x = \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{239} + \frac{\pi}{4}.$$

3) Soit x l'unique solution de (1). On note $\varphi = \mathrm{Arctan}\, x$.

a) Déterminer $\tan(4\varphi)$.

b) En déduire que $\tan(2\varphi) = \dfrac{5}{12}$. Pour y arriver, on appréciera peut-être d'être informé que :

$$119^2 + 4\cdot(60)^2 = 28561 = (169)^2.$$

c) En déduire $\tan(\varphi)$.

d) Déterminer x.

Exercice 2

Soit G un groupe **commutatif** dont l'opération est notée multiplicativement, et le neutre noté 1.

1) On note H l'ensemble des éléments d'ordre fini de G. Montrer que H est un sous-groupe de G.

Dans la suite de l'exercice, a et b sont deux éléments de H fixés, d'ordres respectifs notés m et n.

2) Montrer que l'ordre de ab est un diviseur de mn.

3) Dans cette question, on suppose en outre que m et n sont premiers entre eux.

a) Montrer que si deux entiers relatifs k et l vérifient :

$$a^k = b^l$$

alors m divise k et n divise l.

b) Montrer que l'ordre de ab est égal à mn.

Exercice 3

Soit $n \geq 2$ un entier fixé. On note U le sous-ensemble de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ formé des éléments qui ont un inverse pour la multiplication dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

1) Donner la liste des éléments de U pour les valeurs particulières $n = 4$, $n = 5$ et $n = 6$.
Dans la suite de l'exercice, pour tout a dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, on note l_a l'application de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ vers lui-même définie pour tout x de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ par : $l_a(x) = ax$.

2) Montrer que l_a est un morphisme de groupes additifs de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ vers lui-même.

3) Montrer que l_a est une bijection si et seulement si a est élément de U.

4) Montrer que tout morphisme de groupes additifs de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ vers lui-même est de la forme l_a pour un a bien choisi. (Indication : en notant φ un morphisme, prendre $a = \varphi(\dot{1})$).

Exercice 4

Pour chacune des propositions, décider si elle est vraie ou fausse, et surtout *justifier avec précision* cette réponse par une démonstration ou un contre-exemple. Attention : aucune réponse ne sera prise en compte sans justification.

1) Il existe trois constantes réelles a, b et c, toutes trois non nulles pour lesquelles, pour tout $x \in [-1, 1]$:

$$a \operatorname{Arcsin} x + b \operatorname{Arccos} x = c.$$

2) Il existe trois constantes réelles a, b et c, toutes trois non nulles pour lesquelles, pour tout $x \geq 1$:

$$a \operatorname{Argsh} x + b \operatorname{Argch} x = c.$$

3) Il existe trois constantes réelles a, b et c, toutes trois non nulles pour lesquelles, pour la valeur particulière $x = e$:

$$a \operatorname{Argsh} x + b \operatorname{Argch} x = c.$$

4) On a l'égalité ensembliste suivante :

$$\{\varphi \in \mathbf{R} \mid \operatorname{Arccos}(\cos(\varphi)) = \varphi\} = \{\psi \in \mathbf{R} \mid \operatorname{Arcsin}(\sin(\psi)) = \psi\}.$$

5) Si deux entiers m et n (tous deux supérieurs ou égaux à 2) sont distincts, les groupes $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ ne sont pas isomorphes.