Manipulations des concepts fondamentaux (morphismes notamment)

Exercice 1
Soit G_1 et G_2 deux groupes et f un morphisme de G_1 vers G_2. Montrer que $f(G_1)$ est un sous-groupe de G_2.

Exercice 2
Soit G un groupe. Pour a élément de G, on note f_a l'application de G vers G définie pour tout x de G par $f_a(x) = axa^{-1}$.

1) Montrer que pour tout a de G, f_a est un isomorphisme de G sur lui-même.

2) Soit Φ l'application de G vers le groupe des permutations $\mathcal{S}(G)$ définie par $\Phi(a) = f_a$. Montrer que Φ est un morphisme de groupes. Est-ce un isomorphisme ?

Exercice 3
Soit G l'ensemble des isomorphismes du groupe additif $\mathbf{R}$ sur lui-même, muni de la composition.
Montrer que G est un groupe.

Exercice 4
Soit G un groupe (dont l'opération est notée multiplicativement), et soit a un élément fixé de G.
On définit sur G une nouvelle opération $\star$ en posant, pour tous éléments x et y de G :

$$x \star y = xay.$$

Montrer que pour cette nouvelle opération, G est encore un groupe.

Exercice 5
1) Soit G un groupe (dont l'opération est notée multiplicativement), soit A un ensemble et soit f une bijection de G sur A.
On définit sur A une opération $\star$ en posant, pour tous y_1 et y_2 de A :

$$y_1 \star y_2 = f\left[f^{-1}(y_1)f^{-1}(y_2)\right].$$

Montrer que pour cette opération $\star$, A est un groupe, isomorphe à G.

2) On définit sur $\mathbf{R}$ une opération $\star$ en posant, pour tous réels y_1 et y_2 :

$$y_1 \star y_2 = \left(\sqrt[3]{y_1} + \sqrt[3]{y_2}\right)^3.$$

Montrer que cette opération est associative.

3) On définit sur $\mathbf{R}$ une opération $\diamond$ en posant, pour tous réels y_1 et y_2 :

$$y_1 \diamond y_2 = y_1 + y_2 - 5.$$

Montrer que pour cette opération, $\mathbf{R}$ est un groupe.

4) Comment a été fabriqué l'exercice précédent ?

Manipulations autour de l'ordre d'un élément

Exercice 6
Soit G un groupe fini. On suppose que tous ses éléments (sauf e) sont d'ordre 2.
Pour $A \subset G$ et $a \in G$, on note $aA = \{ax \mid x \in A\}$.

1) Montrer que G est abélien.

2) Soit H un sous-groupe de G et soit a un élément de G qui n'appartient pas à H. Montrer que $H \cup aH$ est encore un sous-groupe de G, qui a deux fois plus d'éléments que H.

3) Montrer que le nombre d'éléments de G est une puissance de 2.

Exercice 7

1) Soit G un groupe ayant 120 éléments, et soit a un élément de G. Montrer que $a^{120} = e$.

2) Existe-t-il un groupe à 120 éléments dont tous les éléments soient d'ordre 120 ?

3) Existe-t-il un groupe à 120 éléments dont tous les éléments sauf l'élément neutre soient d'ordre 120 ?

4) Existe-t-il un groupe à 120 éléments qui ne contienne aucun élément d'ordre 120 ?

Exercice 8

Soit G un groupe **commutatif** noté multiplicativement.
Dans G on suppose qu'un élément a est d'ordre 5 et qu'un élément b est d'ordre 7.
Quel est l'ordre de ab ?

Exercice 9

Soit p un nombre premier et G et G' deux groupes d'ordre p.
On prend $a \neq e$ et $a' \neq e'$ respectivement dans G et dans G'.

1) Déterminer l'ordre de a et de a'.

2) Montrer que $G =< a >$ et que $G' =< a' >$.

3) On définit une application f de G vers G' en posant pour chaque $n \in \mathbf{N}$: $f(a^n) = a'^n$.
Montrer que f est bien une application, et que c'est un isomorphisme entre G et G'.

Des exemples de groupes

Exercice 10

(Les groupes à trois éléments)

1) Soit G un groupe à trois éléments e, a et b, où on note e l'élément neutre de G.
Montrer que $a^2 = b$.

2) Soit toujours G et soit en outre G' un autre groupe à trois éléments notés e', a' et b', e' étant son élément neutre.
On définit une application f de G vers G' par :

$$f(e) = e' \qquad f(a) = a' \qquad f(b) = b'.$$

Montrer que f est un isomorphisme entre G et G'.

Exercice 11

(Groupe des similitudes planes directes)

1) Soit F l'ensemble des applications de $\mathbf{C}$ vers $\mathbf{C}$ de la forme $z \mapsto az + b$ où a et b sont des nombres complexes. On munit F de la composition des applications.
Montrer que F n'est pas un groupe.

2) Soit G l'ensemble des applications de $\mathbf{C}$ vers $\mathbf{C}$ de la forme $z \mapsto az + b$ où a est un nombre complexe non nul et b est un nombre complexe. On munit G de la composition des applications.
Montrer que G est un groupe.
Dans la suite, on note $s_{a,b}$ l'application $z \mapsto az + b$.

3) Soit φ l'application de G vers $\mathbf{C}^*$ qui à $s_{a,b}$ associe a.
Expliquer en quoi il n'est pas si clair que φ est une application, puis montrer que c'en est bien une.

4) Montrer que φ est un morphisme de groupes (l'opération sur $\mathbf{C}^*$ étant la multiplication), et déterminer son noyau.

5) Montrer que $\operatorname{Ker} \varphi$ est un groupe isomorphe à $\mathbf{C}$ (muni de l'addition).

6) Montrer que tout élément de G d'ordre fini est de la forme $s_{a,b}$ avec a racine de l'unité dans $\mathbf{C}$.

7) Montrer que les éléments d'ordre fini de G sont exactement les $s_{a,b}$ avec $a \neq 1$ racine de l'unité dans $\mathbf{C}$, b quelconque et l'identité.

Exercice 12
(Le groupe des permutations d'un ensemble à trois éléments)
Soit $\mathcal{S}_3$ le groupe des permutations de $\{1,2,3\}$.
On appelle transpositions les permutations $t \in \mathcal{S}_3$ telles que $t \circ t = Id$.

1) Combien $\mathcal{S}_3$ admet-il de sous-groupes à 1 élément ? à 6 éléments ? à 4 éléments ? à 5 éléments ?

2) Combien y a-t-il de transpositions dans $\mathcal{S}_3$?

3) Soit H un sous-groupe de $\mathcal{S}_3$ possédant 2 éléments. Montrer que $H = \{Id, t\}$ où t est une transposition. En déduire le nombre de sous-groupes de $\mathcal{S}_3$ possédant 2 éléments.

4) Soit H un sous-groupe de $\mathcal{S}_3$ possédant 3 éléments. Montrer que H ne contient pas de transposition. En déduire le nombre de sous-groupes de $\mathcal{S}_3$ possédant 3 éléments.

Un problème au sujet des sous-groupes de $(\mathbf{Z}^2, +)$.

Exercice 13
Convention de notation : Dans tout le problème, pour T sous-ensemble de $\mathbf{Z}^2$, on notera, par définition :

$$T_x = T \cap (\mathbf{Z} \times \{0\}) \quad \text{et} \quad T_y = T \cap (\{0\} \times \mathbf{Z})$$

Première partie : commençons par les sous-groupes de $(\mathbf{Z}, +)$.

1) Donner au moins trois exemples de sous-groupes de $(\mathbf{Z}, +)$.

2) Soit H un sous-groupe de $(\mathbf{Z}, +)$ tel que $H \neq \{0\}$.

   a) Montrer que $H \cap \mathbf{N}^* \neq \emptyset$.

   b) Pourquoi cela a-t-il un sens d'introduire l'entier a défini par

$$a = \operatorname{Min}(H \cap \mathbf{N}^*)?$$

   c) Montrer que $a\mathbf{Z} \subset H$.

   d) Montrer que $H = a\mathbf{Z}$.

Deuxième partie : échauffement

3) Donner un exemple de sous-groupe H de $\mathbf{Z}^2$ tel que $H_x = H_y = \{(0,0)\}$ mais $H \neq \{(0,0)\}$.

4) Soit H un sous-groupe de $\mathbf{Z}^2$ tel que $H_x = \mathbf{Z} \times \{0\}$ et $H_y = \{0\} \times 6\mathbf{Z}$. Montrer que $H = \mathbf{Z} \times 6\mathbf{Z}$.

5) Soit H un sous-groupe de $\mathbf{Z}^2$ tel que $H_x = 5\mathbf{Z} \times \{0\}$ et $H_y = \{(0,0)\}$. Montrer que $H = 5\mathbf{Z} \times \{0\}$.

6) Donner un exemple de sous-groupe H de $\mathbf{Z}^2$ tel que $H_x = 2\mathbf{Z} \times \{0\}$ et $H_y = \{0\} \times 2\mathbf{Z}$, mais $H \neq 2\mathbf{Z} \times 2\mathbf{Z}$.

7) Montrer que les groupes $(\mathbf{Z}, +)$ et $(\mathbf{Z}^2, +)$ ne sont pas isomorphes l'un à l'autre.

Troisième partie : Étude des sous-groupes qui ne rencontrent l'axe horizontal qu'à l'origine
Dans cette partie, H est un sous-groupe de $\mathbf{Z}^2$ tel que $H_x = \{(0,0)\}$. On suppose en outre que $H \neq \{(0,0)\}$.

8) Justifier l'existence de l'entier D défini par :

$$D = \operatorname{Min}\{d \in \mathbf{N}^* \mid \exists c \in \mathbf{Z}, (c,d) \in H\}.$$

puis l'existence d'un entier $C \in \mathbf{Z}$ tel que $(C, D) \in H$.

9) a) Soit (u, v) un élément de H. En utilisant la division euclidienne de v par D, montrer que v est un multiple de D.

   b) Montrer qu'il existe un $k \in \mathbf{Z}$ tel que $(u, v) = k(C, D)$.

10) Montrer que H est isomorphe à $\mathbf{Z}$.

Quatrième partie : Étude des sous-groupes qui rencontrent non trivialement l'axe horizontal
Dans cette partie, H est un sous-groupe de $\mathbf{Z}^2$ tel que $H_x \neq \{(0,0)\}$.

11) En utilisant la première partie, montrer qu'il existe un $A > 0$ tel que $H_x = A\mathbf{Z} \times \{0\}$.

12) Dans cette question, on suppose que $H = H_x$. Montrer que H est isomorphe à $\mathbf{Z}$.

13) Dans cette question, on suppose au contraire que $H \neq H_x$.

a) Justifier l'existence de l'entier D défini par :

$$D = \operatorname{Min}\{d \in \mathbf{N}^* \mid \exists c \in \mathbf{Z}, (c, d) \in H\}.$$

puis l'existence d'un entier $C \in \mathbf{Z}$ tel que $(C, D) \in H$.
On note φ l'application $\mathbf{Z}^2 \to \mathbf{Z}^2$ définie par :

$$\varphi(m, n) = m(A, 0) + n(C, D).$$

b) Montrer que φ est un morphisme de groupes additifs.

c) Montrer que φ est injective.

d) Montrer que $\varphi(\mathbf{Z}^2) \subset H$.

e) Montrer que $\varphi(\mathbf{Z}^2) = H$.

f) Montrer que H est isomorphe à $\mathbf{Z}^2$.

Conclusion

14) Conclure, en énonçant et justifiant un énoncé de la forme suivante : "Tout sous-groupe additif de $\mathbf{Z}^2$ est isomorphe à l'un des groupes suivants : (à compléter)".

Deux exercices inclassables sans prétention à illustrer un concept, juste des exercices pour s'exercer

Exercice 14

On note G l'ensemble des couples (a, b) de réels tels que $a \neq 0$.
On définit sur G une opération $\star$ par :

$$(a, b) \star (c, d) = (ac, d + bc).$$

1) Montrer que G est un groupe pour $\star$. Est-il abélien ?

2) a) On désigne par H l'ensemble des couples du type $(a, 0)$ qui sont dans G. Montrer que H est un sous-groupe de G.

b) On désigne par K l'ensemble des couples du type $(1, b)$ qui sont dans G. Montrer que K est un sous-groupe de G.

c) H et K sont-ils des groupes abéliens ?

d) Montrer que tout couple (a, b) de G peut s'écrire comme composé pour $\star$ d'un élément de H et d'un élément de K.

Exercice 15

Soit G un groupe, dont l'opération est notée multiplicativement.
On suppose que pour tous x et y dans G, on a les trois relations :

$$(xy)^9 = x^9 y^9, \qquad (xy)^{10} = x^{10} y^{10} \quad \text{et} \quad (xy)^{11} = x^{11} y^{11}.$$

1) Montrer que pour tous x et y dans G, on a les identités :

$$x^9 y = y x^9 \quad \text{et} \quad x^{10} y = y x^{10}.$$

2) En déduire que pour tous x et y dans G, on a :

$$x^{10} y x = x^{11} y.$$

3) Montrer que G est un groupe commutatif.