Université Claude Bernard - Lyon 1 Printemps 2011
Math II - PMI/CCP Durée : 1 heure et 30 minutes

Problème - Devoir numéro 2

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si un étudiant est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qu'il lui était demandé de démontrer.

La ligne directrice du problème est de faire diverses remarques sur les endomorphismes de rang 1 d'un espace vectoriel de dimension finie.

Première partie :
Quelques observations sur un exemple :
Dans cette première partie mais pas au-delà u désigne l'application de $\mathbf{R}^3$ vers $\mathbf{R}^3$ définie pour tout (x, y, z) de $\mathbf{R}^3$ par :

$$u(x, y, z) = (-x - y, 2x + 2y, -3x - 3y).$$

On admettra sans expliquer pourquoi que u est un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$.

1) Calculer $u \circ u$.

2) Déterminer une base de $\operatorname{Im} u$, une représentation cartésienne de $\operatorname{Ker} u$ et pour finir une base de $\operatorname{Ker} u$.

3) Déterminer $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u$.

Deuxième partie
Dans toute la suite du problème, E désigne un espace vectoriel de dimension finie notée n et u un endomorphisme **de rang 1** de E.
Dans cette partie (et dans cette partie seulement), on suppose en outre que u satisfait à l'identité $u \circ u = u$.

4) Montrer que $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u = \{0\}$.

5) Soit x un vecteur de E. On note $y = u(x)$ et $z = x - u(x)$, de sorte que $x = y + z$. Montrer que $y \in \operatorname{Im} u$ et $z \in \operatorname{Ker} u$.

6) Soit (e_1) une base de $\operatorname{Im} u$ et $(f_1, \ldots, f_k)$ une base de $\operatorname{Ker} u$. Montrer que $(e_1, f_1, \ldots, f_k)$ est une famille génératrice de E, et en déduire que $n - 1 \leq k$.

7) Montrer que $k = n - 1$ et que $(e_1, f_1, \ldots, f_{n-1})$ est une base de E.

Troisième partie
Dans cette partie, et uniquement dans cette partie, $E = \mathbf{R}^n$. On note u_k l'application de $\mathbf{R}^n$ vers lui-même définie par :

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (0, \ldots, 0, x_k, 0, \ldots, 0)$$

la composante x_k étant placée en k-ème position dans le n-uplet $(0, \ldots, 0, x_k, 0, \ldots, 0)$.

8) Montrer que pour tout k entre 1 et n, u_k est linéaire et de rang 1, et vérifier que $Id = u_1 + \cdots + u_n$.

9) Soit f un endomorphisme non nul de $\mathbf{R}^n$ et k un entier entre 1 et n. Montrer que $\operatorname{Im}(u_k \circ f) \subset \operatorname{Im} u_k$, puis en déduire que $u_k \circ f$ est de rang 0 ou 1.

10) En écrivant $f = Id \circ f = (u_1 + \cdots + u_n) \circ f$, montrer que f peut être écrite comme somme d'endomorphismes tous de rang 1.

Quatrième partie
À partir de cet endroit de l'énoncé, on ne suppose plus $E = \mathbf{R}^n$. On suppose toujours que u est un endomorphisme de rang 1 de l'espace vectoriel de dimension finie E, mais on ne suppose plus que $u \circ u = u$. On note $\mathbf{K}$ l'ensemble des scalaires de l'espace vectoriel E.

11) Soit (a) une base de $\operatorname{Im} u$. Montrer qu'il existe une et une seule application φ de E vers $\mathbf{K}$ telle que pour tout vecteur x de E :

$$u(x) = \varphi(x)a$$

puis justifier que φ est linéaire.

12) En utilisant l'écriture de u de la question précédente, montrer qu'il existe un scalaire α et un seul tel que :

$$u \circ u = \alpha u.$$

13) Application numérique : dans cette question on suppose que u est l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ défini par $u(x, y, z) = (2x + y + z, 2x + y + z, -6x - 3y - 3z)$. Déterminer une base (a) de $\operatorname{Im} u$ puis l'application φ comme à la question 11 et finalement la valeur du réel α tel que $u \circ u = \alpha u$.

14) Montrer que si on a deux écritures différentes :

$$u(x) = \varphi(x)a \text{ et } u(x) = \psi(x)b$$

toutes deux valables pour tout x de E, et dans lesquelles φ et ψ sont des applications de E vers $\mathbf{K}$ et a et b des vecteurs, il existe un scalaire λ non nul tel que $a = \lambda b$ et $\psi = \lambda\varphi$.

15) Combien y a-t-il d'endomorphismes de rang 1 dans un espace de dimension n sur $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$?