Exercice 72
Lesquels de ces ensembles sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^2$?
1) L'ensemble D_1 engendré par le vecteur $(2,3)$.
2) L'ensemble $D_2 = \{\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 3x - 2y = 0\,\}$.
3) L'ensemble $D_3 = \{\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 3x - 2y = 1\,\}$.
4) L'ensemble $D_4 = \{\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 3x + 4y = 0\,\}$.
5) L'ensemble $D_5 = \{\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\,\}$.
6) L'ensemble $D_6 = \{\,(\alpha, 2\alpha) \mid \alpha \in \mathbf{R}\,\}$.
7) L'ensemble $D_7 = \{\,(x,y) \mid x \geq 0, y \geq 0\,\}$.
8) L'ensemble $D_8 = \{\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 9x^2 + 4y^2 - 12xy = 0\,\}$.

Exercice 73
Lesquels de ces ensembles sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$?
1) L'ensemble $E_1 = \{\,(\alpha,\beta,0) \mid \alpha \in \mathbf{R}, \beta \in \mathbf{R}\,\}$.
2) L'ensemble $E_2 = \{\,(x,y,z) \mid xy + yz + z + x = 0\,\}$.
3) L'ensemble $E_3 = \{\,(x,y,z) \mid x + y + z = 0\,\}$.
4) L'ensemble $E_4 = \{\,(x,y,z) \mid x + y + z = 1\,\}$.
5) L'ensemble $E_5 = \{\,(x,y,z) \mid \sin x + \sin y + \sin z = 0\,\}$.

Exercice 74
1) a) Soit x un réel. Discuter selon la valeur de x de ce que vaut le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(x)$ du $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{R}$ engendré par x.
b) En déduire la description complète des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}$.
2) a) Soit (a,b) et (c,d) deux vecteurs de $\mathbf{R}^2$ non colinéaires l'un à l'autre (c'est-à-dire tels que pour tout λ réel, on ait $(a,b) \neq \lambda(c,d)$ et $(c,d) \neq \lambda(a,b)$).
Montrer que le sous-espace vectoriel du $\mathbf{R}$-espace $\mathbf{R}^2$ engendré par (a,b) et (c,d) est égal à $\mathbf{R}^2$.
b) En déduire la description complète des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^2$.

Exercice 75
Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ? Justifier la réponse.
1) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, f(x,y,z) = (x+1, y+1, z+1)$;
2) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}, f(x,y,z) = x + y + z$;
3) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}, f(x,y,z) = xyz$;
4) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, f(x,y,z) = (10, 100, 1000)$;
5) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}, f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$;
6) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3, f(x) = (x, 2x, 7x)$;
7) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, f(x,y) = (\sin x, \cos y)$.

Exercice 76
1) Déterminer l'ensemble des application linéaires surjectives de $\mathbf{R}^4$ vers $\mathbf{R}^6$.
2) Déterminer l'ensemble des applications linéaires injectives de $\mathbf{R}^4$ vers $\mathbf{R}^3$.
3) Déterminer l'ensemble des applications linéaires injectives de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}^4$.

Exercice 77
On pose $u = (1,4,3), v = (0,2,1)$ et $w = (3,1,-1)$.
1) Montrer que (u,v,w) est libre dans $\mathbf{R}^3$.
2) Montrer que (u,v,w) est un système générateur de $\mathbf{R}^3$ (sans utiliser la théorie de la dimension).

Exercice 78
Le vecteur $(1,2,3)$ est-il ou non dans le sous-espace de $\mathbf{R}^3$ engendré par la famille suivante :

$$((1,1,1), (-2,1,7), (1,-1,5), (2,1,-1))\,?$$

Exercice 79
Discuter en fonction du paramètre réel m si la famille $((1,1,0),(m,0,m),(0,m,3))$, composée de trois vecteurs de $\mathbf{R}^3$, est libre ou non.

Exercice 80
Dans $\mathbf{Q}^3$, on considère les vecteurs : $u=(1,-1,1)$, $v=(0,-1,2)$, $w=(1,-2,3)$.

1) La famille (u,v,w) est-elle libre ?

2) Soit F le sous-espace vectoriel engendré par (u,v,w). Donner une base de F.

3) Soit $G=\{\,(x,y,z)\in\mathbf{Q}^3 \mid x+2y+z=0\,\}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{Q}^3$, puis que $F=G$.

Exercice 81
Dans $\mathbf{R}^4$, on considère les vecteurs :

$v_1=(1,2,0,1)$, $v_2=(1,0,2,1)$, $v_3=(2,0,4,2)$,
$w_1=(1,2,1,0)$, $w_2=(-1,1,1,1)$, $w_3=(2,-1,0,1)$, $w_4=(2,2,2,2)$.

1) Démontrer que les familles (v_1,v_2) et (w_1,w_2,w_3) sont libres.

2) Soit F le sous-espace vectoriel engendré par (v_1,v_2,v_3). Déterminer une base de F.

3) Soit G le sous-espace vectoriel engendré par (w_1,w_2,w_3,w_4). Déterminer une base de G.

Exercice 82
Dans $\mathbf{R}^3$, déterminer la nature géométrique et une base de chacun des sous-espaces vectoriels suivants :

1) $E_1=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid 2x+y+z=0\,\}$, $E_2=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid 2y-z=0\,\}$, et enfin $E_3=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid 2x+y+z=0 \text{ et } 2y-z=0\,\}$.

2) $F_1=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x+2y+z=0\,\}$, $F_2=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x+y=0 \text{ et } y+z=0\,\}$ et enfin $F_3=F_1\cap F_2$.

Exercice 83
Dans ce qui suit, on note (x_1,x_2,x_3) un vecteur quelconque de $\mathbf{R}^3$.
On appelle :
F_1 le sous-espace de $\mathbf{R}^3$ d'équation $x_1+x_2-3x_3=0$.
F_2 le sous-espace de $\mathbf{R}^3$ engendré par les trois vecteurs $a=(3,0,1)$, $b=(2,1,1)$ et $c=(1,2,1)$.
F_3 le sous-espace de $\mathbf{R}^3$ caractérisé par les équations :

$$\begin{cases} x_1+x_2-3x_3=0 \\ x_1-x_2-x_3=0 \end{cases}.$$

F_4 le sous-espace de $\mathbf{R}^3$ caractérisé par les équations :

$$\begin{cases} x_1+x_2-3x_3=0, \\ x_1-x_2-x_3=0 \\ x_1-2x_3=0 \end{cases}.$$

F_5 le sous-espace de $\mathbf{R}^3$ engendré par les deux vecteurs $b=(2,1,1)$ et $d=(0,1,0)$.

1) Déterminer des bases respectives des cinq espaces F_1, F_2, F_3, F_4 et F_5.

2) Pour chacune des inclusions énumérées ci-dessus, dites (et justifiez) si elle est vraie ou non :

a) $F_1\subset F_2$? b) $F_2\subset F_1$? c) $F_3\subset F_5$? d) $F_5\subset F_3$?
e) $F_3\subset F_1$? f) $F_1\subset F_3$? g) $F_3\subset F_4$? h) $F_4\subset F_3$?

Exercice 84
Montrer que les deux familles de vecteurs suivantes :

$$((1,2,-1,3),(2,4,1,-2),(3,6,3,-7)) \text{ et } ((1,2,-4,11),(2,4,-5,14))$$

engendrent le même sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^4$.

Exercice 85
On note H le sous-espace de $\mathbf{R}^4$ engendré par les vecteurs :

$$u = (1, 2, 3, 0) \text{ et } v = (1, 0, -1, 5).$$

1) Donner une base de H.

2) Compléter explicitement cette base de H en une base de $\mathbf{R}^4$.

Exercice 86
Soit $E = \{ (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x = 2y - z \text{ et } t = x + y + z \}$.
Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ et en déterminer une base.

Exercice 87

1) Donner un exemple de deux systèmes $(f_1, \ldots, f_p)$ et $(g_1, \ldots, g_q)$ d'un même $\mathbf{R}^n$ telles que :
 * les deux systèmes $(f_1, \ldots, f_p)$ et $(g_1, \ldots, g_q)$ sont libres ;
 * chaque fois qu'on prend un i (entre 1 et p) et un j (entre 1 et q), f_i n'est pas proportionnel à g_j ;
mais que pourtant le système $(f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q)$ soit lié.

2) On suppose cette fois que $f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q$ sont des vecteurs de $\mathbf{R}^n$ (où n est un entier naturel fixé) tels que :
 * les deux systèmes $(f_1, \ldots, f_p)$ et $(g_1, \ldots, g_q)$ sont libres ;
 * en notant F le sous-espace engendré par $(f_1, \ldots, f_p)$ et G le sous-espace engendré par $(g_1, \ldots, g_q)$, l'intersection $F \cap G$ est réduite à $\{0\}$.
Montrer que le système $(f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q)$ est libre.

Exercice 88
Soit n un entier naturel et soit $(e_1, \ldots, e_k)$ un système fixé de vecteurs de $\mathbf{R}^n$.
On note $\Phi : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ l'application définie par :
pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbf{R}^k$,

$$\Phi\left[(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)\right] = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_k e_k.$$

1) Montrer que $(e_1, \ldots, e_k)$ est générateur de $\mathbf{R}^n$ si et seulement si Φ est une surjection.

2) Montrer que $(e_1, \ldots, e_k)$ est libre si et seulement si Φ est une injection.

Exercice 89

1) Montrer que la réunion de deux sous-espaces vectoriels F et G d'un même $\mathbf{R}^n$ peut ne pas être un espace vectoriel.

2) Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un même $\mathbf{R}^n$, tels que $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$.
Montrer que $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$.

Espaces vectoriels de fonctions

Exercice 90
Soit $E = \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ l'espace des applications de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$.

1) Rappeler la définition de la structure usuelle d'espace vectoriel sur cet ensemble.

2) Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ?
 a) L'ensemble des applications linéaires ?
 b) L'ensemble des applications continues ?
 c) L'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$?
 d) L'ensemble des applications surjectives ?
 e) L'ensemble des applications f telles que $f^{-1}(\mathbf{R}^*)$ est fini ?

Exercice 91
Dans l'espace de l'exercice précédent, montrer que sont libres les familles suivantes (par abus de notation, on note parfois dans la liste qui suit $f(x)$ pour signifier f) :

1) $(\sin, \cos)$.

2) (x, x^2, x^3).

3) (e^x, e^{2x}, e^{3x})

4) (e^{ax}, e^{bx}, e^{cx}) où a, b et c sont trois réels distincts.

Exercice 92
Soit E l'espace vectoriel des suites de réels, et soit $F \subset E$ l'ensemble des suites (u_n) qui vérifient la relation de récurrence :

$$\text{pour tout } n \geq 0, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n.$$

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

2) Montrer que les suites de terme général $a_n = (-1)^n$ et $b_n = 2^n$ forment une famille libre dans F.

3) Montrer que F est de dimension 2 et que les deux suites de la question précédente en constituent une base.

4) Déterminer toutes les suites (u_n) dans F telles que $u_0 = 1$ et $u_1 = -2$.

Espaces vectoriels plus étranges

Exercice 93

1) Combien d'éléments a une droite dans $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^n$? Et un plan ?

2) Combien y a-t-il de droites dans $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^n$? Et combien de plans ?

3) Combien y a-t-il d'endomorphismes de $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^3$? Combien d'entre eux sont-ils bijectifs ?

Exercice 94
Dans cet exercice, on considère $\mathbf{R}$ comme un espace vectoriel sur $\mathbf{Q}$.

1) Montrer que $(1, \sqrt{2})$ est une famille libre.

2) Montrer que $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est une famille libre.

3) Montrer que $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$ est une famille libre.

Trucs très faciles sur les applications linéaires

Exercice 95
Soit f l'application de $\mathbf{R}^2$ vers $\mathbf{R}^5$ définie pour tous α, β réels par :

$$f[(\alpha, \beta)] = (\alpha + 2\beta, -2\alpha + 3\beta, \alpha + \beta, 3\alpha + 5\beta, -\alpha + 2\beta).$$

1) Montrer que f est une application linéaire.

2) Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et préciser sa dimension.

3) Déterminer $\operatorname{Im} f$ et préciser sa dimension.

Exercice 96
Soit $u\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ l'application définie pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ par :

$$u(x, y) = (4x - 5y, 3x - 4y).$$

1) Montrer que u est linéaire et expliciter sa matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$.

2) Montrer que u est bijective.

3) Expliciter la réciproque u^{-1}.

Sommes, sommes directes, supplémentaires

Exercice 97
On considère les deux sous-ensembles suivants de $\mathbf{R}^4$:

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \,|\, x + 4y - 5z - 2t = 0\} \text{ et } F = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \,|\, 3x - y + t = 0\}$$

1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$; on admettra sans le démontrer que F est également un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$.

2) Déterminer une base de E, puis une base de F.

3) Déterminer une base de $E + F$, puis. une base de $E \cap F$.

4) Soit (f_1, f_2, f_3) la base de F déterminée au 2). Expliciter un vecteur f_4 tel que la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) soit une base de $\mathbf{R}^4$.

Exercice 98
Dans $\mathbf{R}^4$, on considère les vecteurs :
$a_1 = (0, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 0, 1, 1)$, $a_3 = (1, 1, 0, 1)$, $a_4 = (1, 1, 1, 0)$.
Soit F le sous-espace vectoriel engendré par (a_1, a_2) et G celui engendré par (a_3, a_4).
Montrer que $\mathbf{R}^4 = F \oplus G$.

Exercice 99
Dans $\mathbf{R}^4$, on considère les vecteurs :
$u_1 = (1, 1, 1, 1)$, $u_2 = (1, -1, 1, -1)$, $u_3 = (1, 3, 1, 3)$,
$u_4 = (1, 2, 0, 2)$, $u_5 = (1, 2, 1, 2)$, $u_6 = (3, 1, 3, 1)$.
Soit F le sous-espace vectoriel engendré par (u_1, u_2, u_3) et G le sous-espace vectoriel engendré par (u_4, u_5, u_6).
Déterminer une base de F, de G, de $F + G$, de $F \cap G$.

Exercice 100
Dans $\mathbf{R}^4$, on considère les vecteurs :
$u_1 = (2, 3, 0, -1)$, $u_2 = (1, 0, 0, 1)$,
$u_3 = (0, 1, 0, 0)$, $u_4 = (1, 2, 2, 1)$.
Soit F le sous-espace vectoriel engendré par (u_1, u_2) et G le sous-espace vectoriel engendré par (u_3, u_4).
Déterminer les sous-espaces $F \cap G$ et $F + G$.

Exercice 101
Dans $\mathbf{R}^4$ on note $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x + y + z = 0 \text{ et } x - y + t = 0\}$, F la droite de base $(1, 2, 1, 0)$ et G la droite de base $(0, 0, 1, 1)$.
Montrer que $E \oplus F \oplus G = \mathbf{R}^4$.

Exercice 102
Dans $\mathbf{R}^4$, on note $a = (1, -1, 1, 2)$, $b = (0, 1, -1, 3)$, $c = (0, 1, 0, -1)$ et $d = (2, 2, -1, 12)$.
On note $F = \mathrm{Vect}(a, b)$ et $G = \mathrm{Vect}(c, d)$.

1) a) (a, b, c, d) est-il une base de $\mathbf{R}^4$?

b) A-t-on $F + G = \mathbf{R}^4$?

c) Déterminer $F \cap G$.

d) Déterminer une base de $F + G$.

2) On note $e = (0, 0, 0, 1)$, et D la droite engendrée par e.

a) e est-il élément de $F + G$?

b) Montrer que $(F + G) \oplus D = \mathbf{R}^4$.

Exercice 103
Soit E un espace vectoriel et F, G et H trois sous-espaces de E tels que :

$$F \cap G = F \cap H, \qquad F + G = F + H, \qquad G \subset H.$$

Montrer que $G = H$.

Exercice 104
Soit E un espace vectoriel, et soit F, G et H trois sous-espaces de E.

1) Montrer l'inclusion :

$$(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H).$$

Expliciter un exemple montrant que cette inclusion peut être stricte.

2) Montrer l'égalité :

$$(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap [G + (F \cap H)].$$

Exercice 105
Quand F et G sont deux sous-espaces vectoriels distincts de $\mathbf{R}^6$, tous deux de dimension 4 :

1) Quelle peut être la dimension de $F + G$?

2) Quelle peut être la dimension de $F \cap G$?

Exercice 106
Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$ vérifiant $\dim F = 1$, $\dim G = 2$ et $F \not\subset G$.
Montrer que $\mathbf{R}^3 = F \oplus G$.

Retour aux applications linéaires

Exercice 107
Dans $\mathbf{R}^3$, on considère les vecteurs :
$u = (2, 1, -1)$, $v = (1, -1, 3)$ et $w = (3, 3, -5)$.
On note F le sous-espace engendré par (u, v, w).

1) Déterminer une base de F.

2) Soit f l'application de $\mathbf{R}^3$ vers lui-même définie pour tous réels α, β et γ par :

$$f[(\alpha, \beta, \gamma)] = (3\alpha + \gamma, \alpha - \beta + \gamma, -3\alpha - 3\beta + \gamma).$$

Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$.

3) Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$ et une base de $\operatorname{Im} f$; préciser $\operatorname{rg} f$.

4) A-t-on $\mathbf{R}^3 = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$?

5) Les vecteurs u, v et w sont-ils des éléments de $\operatorname{Im} f$?

6) Déterminer une base et la dimension de $F \cap \operatorname{Im} f$.

Exercice 108
Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbf{Q}$ et soit (e_1, e_2, e_3) une base de E.
Soit u l'endomorphisme de E défini par :

$$u(e_1) = -e_1 + e_2 + e_3, \qquad u(e_2) = e_1 - e_2 + e_3, \qquad u(e_3) = e_1 + e_2 - e_3.$$

On note enfin $F = \{\, x \in E \mid u(x) = x \,\}$, $G = \{\, x \in E \mid u(x) = -x \,\}$ et $H = \{\, x \in E \mid u(x) = -2x \,\}$

1) Écrire la matrice de u dans la base (e_1, e_2, e_3) de E.

2) Montrer que F, G et H sont des sous-espaces vectoriels de E, et déterminer une base de chacun d'entre eux.

3) Montrer que $E = F \oplus H$. Déterminer une nouvelle base (f_1, f_2, f_3) de E telle que :

$$u(f_1) = f_1, \qquad u(f_2) = -2f_2, \qquad u(f_3) = -2f_3.$$

Écrire la matrice de u dans la base (f_1, f_2, f_3) de E.

4) Montrer que u est bijective.