Exercice 1

1) Quand n tend vers l'infini, y_n/n tend vers 0 ce qui légitime d'en développer le cosinus par la formule habituelle de développement limité :

$$\cos\left(\frac{y_n}{n}\right) = \cos\left(\frac{1}{n} + \frac{a}{n^3} + o(\frac{1}{n^3})\right) = 1 - \left(\frac{1}{2n^2} + \frac{a}{n^4}\right) + \frac{1}{24n^4} + o(\frac{1}{n^4}).$$

En soustrayant ce développement de la définition de y_n, on arrive bien à la formule généreusement fournie par l'énoncé, dont l'auteur sait fort bien que trop peu de monde l'aurait trouvée correcte mais n'est pas une brute.

2) Cette condition est remplie dès lors que les coefficients des termes en $1/n^2$ et en $1/n^4$ du développement précédent sont nulles, c'est à-dire quand :

$$a = -\frac{1}{2} \text{ et } b = \frac{13}{24}.$$

3) a) Rien de subtil : on dérive φ_n ; la dérivée se révèle être, pour tout t de $[0,1]$:

$$\varphi_n'(t) = 1 + \frac{1}{n}\sin\left(\frac{t}{n}\right).$$

Quand t est entre 0 et 1, c'est aussi le cas de t/n, qui est donc dans un intervalle où le sinus ne prend que des valeurs positives. La dérivée φ_n' ne prend donc que des valeurs supérieures ou égales à 1 et en particulier strictement positives. D'où on conclut que φ_n est strictement croissante.

b) L'équation peut se réécrire :

$$\varphi_n(x_n) = 0.$$

Or la fonction φ_n est continue, avec $\varphi_n(0) = -1$ strictement négatif et $\varphi_n(1) = 1 - \cos(1/n)$ strictement positif. Le théorème des valeurs intermédiaires garantit l'existence d'une solution à l'équation. L'unicité vient de l'injectivité de φ_n, elle même corollaire de sa stricte monotonie.

c) Pour chaque n, $0 \leq x_n/n \leq 1/n$, donc $x_n/n \to 0$ quand $n \to \infty$, donc $\cos(x_n/n) \to 1$. Mais $x_n = \cos(x_n/n)$, donc $x_n \to 1$.

d) Le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction garantit l'existence d'un c dans l'intervalle d'extrémités s et t tel que $|\varphi_n(s) - \varphi_n(t)| = |\varphi_n'(c)||s-t|$.

Mais on a remarqué au a) que toutes les valeurs prises par φ_n' sont plus grandes que 1. C'est en particulier le cas de sa valeur en c. Ce qui permet de conclure.

4) Toute l'astuce est de remarquer que :

$$|y_n - \cos\left(\frac{y_n}{n}\right)| = |\varphi_n(y_n) - 0| = |\varphi_n(y_n) - \varphi_n(x_n)|$$

puis d'appliquer à cette expression le 2 d).

On applique ensuite l'inégalité qui précède pour les valeurs de a et b trouvées à la fin du 1). Comme $y_n - 1 \sim -1/2n^2$ quand n tend vers l'infini, y_n est donc dans $[0,1]$ pour tout n assez grand, et c'est donc légitime.

On en déduit que $x_n - y_n$ est un $o(1/n^4)$.

En y recopiant la définition même de y_n on a le développement limité :

$$x_n = 1 - \frac{1}{2n^2} + \frac{13}{24n^4} + o(\frac{1}{n^4})$$

quand n tend vers l'infini.

Exercice 2

1) a) Soit $x \in]0,1]$. Le théorème des accroissements finis appliqué entre 0 et x garantit l'existence d'un $c \in]0,1]$ tel que $\sin x = x \cos c$. Sur cet intervalle, le cosinus prend des valeurs comprises entre 0 et 1 (au sens strict) et x est strictement positif, d'où l'inégalité proposée.

b) Pour l'initialisation, l'inégalité de droite est claire puisque $u_0/2 = 1/2$. Les deux autres s'obtiennent en appliquant le a) à $u_0 = 1$ puis en divisant par 2.
Si on fixe un $n \geq 0$ et qu'on suppose les trois inégalités vraies pour ce n, elles entraînent que $u_{n+1} \in]0,1]$ donc qu'on peut lui appliquer le a). En le faisant puis en divisant par 2 on obtient l'encadrement :

$$0 < u_{n+2} \leq \frac{u_{n+1}}{2}.$$

Enfin l'inégalité de droite est évidente puisqu'on sait déjà que $u_{n+1} \leq 1$ donc $u_{n+1}/2 \leq 1/2 \leq 1$.

c) La première inégalité se montrerait par une nouvelle récurrence sur n ; la deuxième se montre en appliquant la fonction croissante ln à l'inégalité $u_{n+1} \leq u_n/2$.

2) a) On remplace u_{n+1} par sa définition et on obtient l'écriture suggérée par l'énoncé pour v_n. Dans cette écriture u_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini, vu le 1 c). On peut donc faire le calcul suivant :

$$v_n = -\ln 2 + \ln(u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3)) - \ln u_n + \ln 2 = \ln(1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2)) = -\frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2).$$

b) On déduit du a) que quand n tend vers l'infini, $\dfrac{|v_n|}{u_n^2}$ tend vers $1/6$. Il existe donc un N au-delà duquel cette quantité est inférieure ou égale à 1, ce qui prouve la première inégalité. La deuxième découle de la majoration de u_n du 1 c).

c) Pour l'existence de A rendant vraie l'inégalité de gauche, on prendra :

$$A = \mathrm{Max}(|v_0|, 4|v_1|, 16|v_2|, \ldots, 4^{N-1}|v_{N-1}|, 1).$$

Pour la variante de droite, elle en découle immédiatement si on se souvient avoir précisé le signe de v_n à la question 1 c).

3) a) Pour $n \geq 0$, on constate que $s_{n+1} - s_n = v_n$. Or le signe de celui-ci a été précisé au 1 c) : il est négatif, donc la suite (s_n) est décroissante.

b) La formule proposée se prouve sans aucun mal par récurrence sur $n \geq 1$, l'initialisation fonctionnant grâce à $\ln(u_0) = 0$.

c) On insère dans la formule du b) la minioration de chaque v_k établie au 2 c) : on obtient :

$$-A \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{4^k} \leq s_n.$$

Ceci ne prouve pas que s_n est minorée, car il nous faut une minoration indépendante de n. Mais ceci se laisse faire en écrivant :

$$-A \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{4^k} = -A \frac{1-(1/4)^n}{1-(1/4)} \geq -A \frac{1}{1-(1/4)} = -\frac{4A}{3}.$$

d) Une suite décroissante minorée converge.

4) On peut écrire que (s_n) converge vers l sous la forme : $\ln(u_n) = -n \ln 2 + l + o(1)$.
En prenant l'exponentielle des deux côtés on obtient : $u_n = (e^l/2^n) \cdot e^{o(1)}$.
Dans cette expression, le $e^{o(1)}$ tend vers $e^0 = 1$ quand n tend vers l'infini. Elle fournit donc l'équivalent proposé.

Exercice 3

1) Question sans difficulté. Je n'écris pas les détails.

2) On écrit que a_n est le logarithme népérien de l'expression de la question 1) ; cela permet le développement :

$$\begin{aligned} a_n = 1 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) &= 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &= 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = -\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

3) D'après le calcul qui précède, n^2a_n tend vers $-1/12$ quand n tend vers l'infini. En appliquant la définition de "tendre vers" à $\epsilon = 1/6$, on en déduit qu'il existe un $N \geq 2$ tel que pour tout $n \geq N$, $-1/6 \leq n^2a_n^{\leq}0$, qu'il n'y a plus qu'à diviser par n^2 pour retrouver la formule proposée.

4) Simple calcul : $\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n(n-1)} \geq \dfrac{1}{n^2}$.

5) On commence par considérer :

$$\begin{aligned} \sum_{k=N}^{n-1} a_k &= a_{n-1} + \cdots + a_{N+1} + a_N \\ &= \ln(u_n) - \ln(u_{n-1}) + \ln(u_{n-1}) - \ln(u_{n-2}) + \cdots + \ln(u_{N+2}) - \ln(u_{N+1}) + \ln(u_{N+1}) - \ln(u_N) \\ &= \ln(u_n) - \ln(u_N). \end{aligned}$$

En encadrant chaque a_k par l'inégalité :

$$-\frac{1}{6(k-1)} + \frac{1}{6k} \leq a_k \leq 0$$

obtenue en mettant bout à bout les questions 3 et 4, et en sommant toutes ces inégalités entre N et n, on obtient, avec à gauche le même phénomène de télescopage que dans le calcul qui a ouvert la question :

$$-\frac{1}{6(N-1)} \leq -\frac{1}{6(N-1)} + \frac{1}{6(n-1)} \leq \sum_{k=N}^{n-1} a_k \leq 0.$$

En remplaçant la somme des a_k par l'expression fournie en ouverture de la question et en se concentrant sur l'inégalité de gauche, on obtient alors :

$$\ln(u_N) - \frac{1}{6(N-1)} \leq \ln(u_n).$$

On a prouvé que la suite $\ln(u_n)$ (pour des $n \geq N$) est minorée.
Pour la décroissance, elle est simplement due au fait que $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = a_n$ est négatif dès lors que n est plus grand que N.
Décroissante et minorée, cette suite converge donc dans $\mathbf{R}$.

6) Puisque (u_n) en est la suite des exponentielles, elle converge aussi, vers une constante qu'on notera C, qui est strictement positive puisque c'est l'exponentielle de la limite les $\ln(u_n)$. Avec cette constante C, on a la réponse à l'exercice.