1) La fonction racine carrée est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$, et les ensembles de définition fournis par l'énoncé ont été choisis de telle sorte que l'expression sous le radical ne prenne que des valeurs strictement positives. Tant f que g est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ par composition de fonctions de cette classe.

2) a) Récurrence pas bien compliquée.

b) On applique la formule qui précède à $\alpha = -1/2$, on remarque que $f(x) = \phi_\alpha(1-x)$ et donc que $f^{(n)}(x) = (-1)^n \phi_\alpha^{(n)}(1-x)$. On obtient :

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)(1-x)^{-\frac{1+2n}{2}} = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n}(1-x)^{-\frac{1+2n}{2}}$$

c) Dans un second temps on applique cette identité à 0. On obtient :

$$n!\,a_n = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n}$$

et il ne saute pas aux yeux qu'on ait trouvé ce qu'il fallait. S'est-on trompé en route ? Que nenni, pour aller de l'avant examinons le quotient $\dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2 a_n}$, en y insérant ce que nous savons désormais au sujet de a_n :

$$\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2 a_n} = \frac{(2n)!}{2^n n!\cdot 1\cdot 3\cdots(2n-1)}.$$

Dans le dernier dénominateur, on fait interagir les n facteurs du 2^n et les n facteurs du $n!$: on remarque que $2^n n! = 2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n$. En rapprochant ce produit de pairs du produit des impairs, on s'aperçoit que le dénominateur vaut $(2n)!$ et donc que le quotient vaut 1. Ceci prouve que a_n a bien l'expression proposée.

3) a) Soit v la fonction dérivable définie sur $]-1,1[$ par $v(x) = u(-x)$. Sa dérivée est donnée par $v'(x) = -u'(-x)$.
Si u est paire, pour tout x dans $]-1,1[$, $v(x) = u(x)$ donc $u = v$ donc $u' = v'$, donc pour tout x, $u'(x) = -u'(-x)$: u' est donc impaire. L'autre cas se traite de la même façon ;

b) $g^{(0)} = g$ est évidemment paire, et d'après le résultat qui précède, $g^{(1)} = g'$ est impaire. Ceci invite à prouver par récurrence sur l'entier $k \geq 0$ l'hypothèse :

$$(H_k) \qquad g^{(2k)} \text{ est paire et } g^{(2k+1)} \text{ est impaire}$$

ce qui se déroule si facilement que je ne le fais pas dans ce corrigé.

c) Une fonction impaire s'annule en 0, donc toutes les dérivées d'ordre impair de g s'annulent en 0. Ceci prouve que pour tout $k \geq 0$, $b_{2k+1} = 0$.

4) a) Les deux fonctions f et g sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc aucun souci pour appliquer Taylor-Young quelque forme qu'on en connaisse.
On commence par le faire pour g, à l'ordre $2k$, en utilisant la nullité des b_{2k+1} : on obtient, éventuellement après utilisation de la définition d'un petit o de Landau, exactement la deuxième des identités proposées.
On recommence avec f, à l'ordre k et en appelant la variable y dans ce calcul. Mais on remarque alors que $x^2 \to 0$ quand $x \to 0$ (et reste non nul quand x reste non nul) donc peut être substitué à y par règle de composition des limites. On obtient la première des identités.

b) Supposons l'énoncé proposé faux, et soit i le plus petit indice tel que $a_i \neq b_i$. Alors la différence des deux lignes, compte tenu de la simplification $f(x^2) - g(x) = 0$, a la forme :

$$\frac{1}{x^{2k}}\left((a_i - b_{2i})x^{2i} + o(x^{2i})\right)$$

et est donc équivalente à

$$(a_i - b_{2i})x^{2(i-k)}.$$

Si $i < k$, cette expression tend vers ∞ avec le signe de $a_i - b_i$, ce qui est absurde puisque le a) nous a enseigné qu'elle tendait vers zéro. Si $i = k$, elle tend vers $a_k - b_k$ supposé non nul, et c'est encore contradictoire.
C'est donc que nous sommes depuis le début de la sous-question dans le délire, resaisissons nous : l'énoncé proposé était vrai ! Et en particulier $b_{2k} = a_k$.

5) g est la dérivée de Arcsin. Dès lors, pour tout n dans $\mathbf{N}^*$:

$$\mathrm{Arcsin}^{(n)}(0) = g^{(n-1)}(0) = (n-1)!\, b_{n-1}.$$

Les b_i d'indice impair sont nuls, donc pour tout $k \geq 1$:

$$\mathrm{Arcsin}^{(2k)}(0) = (2k-1)!\, b_{2k-1} = 0,$$

formule également vraie pour $k = 0$ de façon évidente. Enfin pour tout $k \geq 0$:

$$\mathrm{Arcsin}^{(2k+1)}(0) = (2k)!\, b_{2k} = (2k)!\, a_k = \frac{[(2k)!]^2}{4^k (k!)^2}.$$

6) C'est pareil que la question 1.

7) On peut développer h^2 comme un bovin, et on attendait ça de vous. Si on est plus joueur, on peut introduire la fonction k définie sur $]-\infty, \frac{1}{4}[$ par :

$$k(x) = \frac{1 + \sqrt{1-4x}}{2}$$

puis remarquer que pour tout x fixé, $h(x) + k(x) = 1$ tandis que $h(x)k(x) = x$.
Le réel $h(x)$ est donc solution de l'équation du second degré d'inconnue notée X suivante :

$$X^2 - X + x = 0$$

et écrire qu'il en est solution, c'est écrire $(*)$.

8) On dérive $(*)$ n fois en utilisant la formule de Leibniz dans le membre de gauche. On obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^{(k)}(0) h^{(n-k)}(0) = h^{(n)}(0)$$

En remarquant que $h^{(0)}(0) = h(0) = 0$, on peut modifier les bornes de la sommation dont les deux termes extrêmes sont nuls ; en écrivant les dérivées en fonction des c_i on obtient alors :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} k!\, c_k (n-k)!\, c_{n-k} = n!\, c_n$$

et enfin, si on se souvient que

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!},$$

on trouve le résultat demandé.

9) Étant donné un parenthésage d'un mot de n lettres, on peut lui associer un entier k compris entre 1 et $n-1$: c'est le nombre de lettres qui précèdent la dernière opération effectuée dans le calcul qui obéit à cette règle de parenthésage. Dans l'énumération donnée en exemple, $k = 1$ sur les deux premiers parenthésages (on multiplie a par quelque chose), $k = 2$ dans le second (on multiplie ab par quelque chose) et $k = 3$ dans les deux derniers (on multiplie une expression forgée sur abc par d). Pour une valeur fixée de k le nombre de parenthésages où la dernière multiplication intervient après la k-ème lettre est alors égal au nombre de façons de parenthéser la première partie du mot multiplié par le nombre de façons de parenthéser la deuxième partie,

c'est-à-dire à $d_k d_{n-k}$. Le nombre total de parenthésages d'un mot de n lettres s'obtient alors en sommant ces produits sur k variant entre 1 et $n-1$: c'est bien l'expression annoncée.

10) Simple récurrence sur $n \geq 1$: on a besoin de l'initialier en explicitant $c_1 = 1$ et en le comparant à $d_1 = 1$. L'incrémentation fonctionne sans problème, dès lors que les deux suites c_i et d_i vérifient, au vu des questions 8 et 9, une même relation de récurrence.

11) a) La relation est $h'(x) = f(4x)$ d'où on déduit pour tout $n \geq 1$ que $h^{(n)}(x) = 4^{n-1} f^{(n-1)}(4x)$. On est alors presque au but, je vous laisse le vérifier.

b) On repêche a_{n-1} de la question 2c) et on le reporte dans l'égalité de la question précédente, où on remplace c_n par d_n au vu de la question 10, on obtient :

$$d_n = \frac{(2n-2)!}{n!\,(n-1)!}.$$

Si on met au même dénominateur les deux coefficients binomiaux de la formule proposée (faites le !) on obtient par ailleurs également :

$$\binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n-2} = \frac{(2n-2)!}{n!\,(n-1)!}.$$

D'où le résultat.