Exercice 1

1) Vous auriez dû apprendre votre cours.

2) L'expression de gauche dans l'équation peut être considérée comme une fonction de la variable réelle x. Elle est strictement croissante est continue, puisque Arctan l'est, et définit donc une bijection entre $]-\infty,\infty[$ et $]-2\pi,2\pi[$ (les bornes de cet intervalle sont les limites de la fonction à l'infini). Par ailleurs Arctan$(1/239)$ est entre 0 et $\pi/2$ donc le membre de droite est entre $\pi/4$ et $3\pi/4$ donc dans l'image de la bijection que nous avons considérée. Il y a donc un et un seul x qui en est antécédent, ou, dit autrement, un et un seul x qui vérifie l'équation.

3)

$$\tan(4\varphi) = \tan(\mathrm{Arctan}(\frac{1}{239})) + \frac{\pi}{4} = \frac{\frac{1}{239}+1}{1-\frac{1}{239}} = \frac{120}{119}.$$

$$\frac{120}{119} = \tan(4\varphi) = \frac{2\tan(2\varphi)}{1-\tan^2(2\varphi)}$$

Le nombre $t = \tan(2\varphi)$ vérifie donc l'équation du second degré :

$$120(1-t^2) = 2 \times 119t$$

qui se résout en profitant des indications de l'énoncé. Elle a une solution strictement négative et la solution $5/12$. La solution strictement négative est à exclure, car on a vu à la question précédente que $0 \leq 4\varphi \leq 3\pi/4$ d'où on déduit que $0 \leq 2\varphi \leq 3\pi/8$ et donc que 2φ a une tangente positive.
On recommence de même en écrivant que :

$$\frac{5}{12} = \tan(2\varphi) = \frac{2\tan(\varphi)}{1-\tan^2(\varphi)}$$

Nouvelle équation du second degré, celle-là se résout sans aide. Une solution est $1/5$ tandis que l'autre est strictement négative, à éliminer comme on l'a fait plus haut. Il ne reste plus qu'à conclure que $x = \tan(\mathrm{Arctan}\, x) = \tan\varphi = 1/5$.

Exercice 2

1) H n'est pas vide car le neutre est d'ordre 1. Si a d'ordre m et b d'ordre n sont dans H, on constate que $(ab)^{mn} = (a^m)^n(b^n)^m$ (grâce à la commutativité de G) donc que $(ab)^{mn} = 1$. L'élément ab est donc lui aussi d'ordre fini, donc dans H. Enfin si a est dans H d'ordre fini m, l'élément $a^{-1} = a^{m-1}$ est une puissance à exposant positif de a donc est aussi dans H. Tout ceci prouve que H est un sous-groupe de G.

2) On a vu à la question précédente que $(ab)^{mn} = 1$, ce qui prouve que mn est un multiple de l'ordre de ab.

3) a) Mettons l'hypothèse à la puissance m : on obtient $(a^k)^m = (b^l)^m$ qu'on peut regrouper en $(a^m)^k = b^{lm}$ donc $b^{lm} = 1$. On en déduit que lm est un multiple de l'ordre de b, en d'autres termes que n divise lm. Comme on a supposé que m et n sont premiers entre eux, le lemme de Gauss permet dme conclure que n divise l. On obtient de la même façon que m divise k en changeant les rôles de a et b.

b) Notons r l'ordre de ab ; alors $(ab)^r = 1$. En profitant de la commutativité du groupe, on peut regrouper cela en :

$$a^r = b^{-r}.$$

Vu la première moitié de la question, m et n divisent r. Comme ils sont premiers entre eux, leur produit aussi divise r. Par ailleurs r divise mn par la question précédente, donc $r = mn$.

Exercice 3

1) Pour $n = 4$ ce sont $\dot{1}$ et $\dot{3}$ ($\dot{1} \times \dot{1} = \dot{1}$ donc $\dot{1}$ est inversible d'inverse lui-même, et $\dot{3} \times \dot{3} = \dot{1}$ donc $\dot{3}$ itou, tandis que $\dot{2}$ multiplié par quelque chose donne toujours $\dot{a}$ où a est pair, qui n'est jamais égal à $\dot{1}$).
Pour $n = 5$ ce sont tous les éléments non nuls, car 5 est premier et les inversibles de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ sont connus.
Pour $n = 6$ ce sont $\dot{1}$ et $\dot{5}$.

2) l_a envoie $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ dans lui-même ; de plus pour tous x et y, $l_a(x+y) = a(x+y) = ax + ay = l_a(x) + l_a(y)$. C'est bien un morphisme de groupes (pour l'addition).

3) Supposons d'abord a non inversible. Il n'existe alors aucun x tel que $ax = 1$ ou en d'autres termes aucun x tel que $l_a(x) = 1$. L'application l_a n'est alors pas surjective, donc pas bijective.
Supposons maintenant a inversible d'inverse a^{-1} et soit c fixé. Pour $x \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, $l_a(x) = c \iff ax = c \iff a^{-1}(ax) = a^{-1}c \iff x = a^{-1}c$. Tout élément a donc un et un seul antécédent par l_a, qui est bien bijective.

4) Soit φ un morphisme de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ vers lui-même. Notons $a = \varphi(\dot{1})$ et montrons que $\varphi = l_a$. Pour cela on va montrer par récurrence sur $k \geq 0$ que $\varphi(\dot{k}) = l_a(\dot{k}) = a\dot{k}$. Pour $k = 0$ c'est clair puisque tout morphisme envoie $\dot{0}$ sur $\dot{0}$. Si c'est vrai pour un k fixé, $\varphi(\dot{\overline{k+1}}) = \varphi(\dot{k}) + \varphi(\dot{1}) = a\dot{k} + a = a\dot{k} + a\dot{1} = a(\dot{\overline{k+1}}) = l_a(\dot{\overline{k+1}})$. La propriété est encore vraie à l'ordre $k+1$. Elle est vraie pour tous les $\dot{k}$ donc vraie partout : on conclut que $\varphi = l_a$.

Exercice 4

1) Oui : cf. la formule bien connue $\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x = \dfrac{\pi}{2}$.

2) Non : s'il y en avait, comme b ne serait pas nulle on pourrait regrouper l'équation en :

$$\operatorname{Argch} x = -\frac{a}{b} \operatorname{Argsh} x - \frac{c}{a}$$

et dans ce regroupement la fonction de gauche n'est pas dérivable en 1 alors que celle de droite l'est ; c'est absurde.

3) Oui : prendre par exemple $a = 1$, $b = 1$ et $c = \operatorname{Argsh} e + \operatorname{Argch} e$

4) Non : le premier de ces ensembles est $[0, \pi]$ tandis que le second est $[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$.

5) Oui : ils ne peuvent même pas être mis en bijection, puisqu'ils n'ont pas le même nombre (fini) d'éléments.