Exercice 1

1) Quand x tend vers 0

$$(\operatorname{ch} x)^a = \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)^a = 1 + a\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + \frac{a(a-1)}{2}\frac{x^4}{4} + o(x^5) = 1 + a\frac{x^2}{2} + \frac{3a^2 - 2a}{24}x^4 + o(x^5).$$

$$\begin{aligned}\text{d'où } (\cos x)(\operatorname{ch} x)^a &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)\left(1 + a\frac{x^2}{2} + \frac{3a^2 - 2a}{24}x^4 + o(x^5)\right) \\ &= 1 + \frac{a-1}{2}x^2 + \left(\frac{3a^2 - 8a + 1}{24}\right)x^4 + o(x^5).\end{aligned}$$

2) En utilisant le développement ci-dessus pour les valeurs particulières $a = 3$ et $a = 1$, composé avec le développement très limité $\ln(1 + u) = u + o(u)$ pour u tendant vers 0, on obtient, pour x tendant verz 0 :

$$\ln((\cos x)(\operatorname{ch}^3 x)) \sim x^2 \text{ et } \ln((\cos x)(\operatorname{ch} x)) \sim -\frac{x^4}{6}.$$

3) Le développement obtenu au 1) montre que pour b réel différent de 1,

$$(\cos x)(\operatorname{ch} x)^b - 1 \sim \frac{b-1}{2}x^2$$

tandis que, pour $a = 1$:

$$(\cos x)(\operatorname{ch} x) - 1 \sim -\frac{x^4}{6}.$$

Ce dernier est un $O(x^4)$ donc un o de tous les autres : on voit donc que $a = 1$ répond à la question. Cette valeur est par ailleurs la seule à répondre à la question, puisque pour $a \neq 1$, $(\cos x)(\operatorname{ch} x)^a - 1$ est équivalent au produit de x^2 par une constante et n'est donc pas négligeable devant $(\cos x)(\operatorname{ch} x) - 1$.

Exercice 2

1) En anticipant sur une méthode qui sera bientôt familière, voici un corrigé très court : soit u l'application linéaire de $\mathbf{R}^3$ vers $\mathbf{R}$ dont la matrice dans les bases canoniques est $(2\,1\,-1)$. On constate alors que l'expression analytique de u est : $(x, y, z) \mapsto 2x + y - z$ puis que $E = \operatorname{Ker} u$. Ceci prouve que E est un sous-espace vectoriel. Compte tenu de la question qui suit immédiatement, il est aussi efficace de faire la transformation routinière des cartésiennes vers les paramétriques :
soit $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, alors :

$$\begin{aligned}(x, y, z) \in E &\iff 2x + y - z = 0 \\ &\iff \exists\alpha \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & & & & & = & \alpha \end{array}\right. \\ &\iff \exists\alpha \left\{\begin{array}{rcrcrcl} & + & y & - & z & = & -2\alpha \\ x & & & & & = & \alpha \end{array}\right. \\ &\iff \exists\alpha, \beta \left\{\begin{array}{rcrcrcl} & + & y & - & z & = & -2\alpha \\ x & & & & & = & \alpha \\ & & & & z & = & \beta \end{array}\right. \\ &\iff \exists\alpha, \beta \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & & & & & = & \alpha \\ & & y & & & = & -2\alpha + \beta \\ & & & & z & = & \beta \end{array}\right. \\ &\iff \exists\alpha, \beta \text{ tels que } (x, y, z) = \alpha(1, -2, 0) + \beta(0, 1, 1).\end{aligned}$$

En notant alors $e_1 = (1, -2, 0)$ et $e_2 = (0, 1, 1)$, on constate que E est le sous-espace engendré par ces deux vecteurs, donc un sous-espace ; et comme par ailleurs e_1 et e_2 ne sont visiblement pas proportionnels l'un à l'autre, (e_1, e_2) est libre donc en est une base ; d'où $\dim E = 2$.

2) On résout dans la même veine le système formé des deux équations à trois inconnues définissant E et F ; après introduction d'un paramètre auxiliaire, on voit que pour tout $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, $(x, y, z) \in E \cap F \iff \exists \gamma$ tel que $(x, y, z) = \gamma(0, 1, 1)$. En posant $f_1 = (0, 1, 1)$, vecteur évidemment pas nul, on a fourni une base de $E \cap F$.

3) Prenons n'importe quel vecteur de E qui ne soit pas proportionnel à f_1, disons $f_2 = (1, 0, 2)$; alors (f_1, f_2) est libre dans E qui est de dimension 2 donc en est une base. On fait de même pour F, par exemple en prenant $f_3 = (1, 0, 1)$.

4) On peut vérifier par un calcul explicite que (f_1, f_2, f_3) est libre, et en conclure que c'est une base de $\mathbf{R}^3$ puisque cet espace est de dimension 3. Il est plus élégant de faire ça sans les valeurs numériques : soit λ, μ et ν tels que $\lambda f_1 + \mu f_2 + \nu f_3 = 0$. Alors $\lambda f_1 + \mu f_2 = -\nu f_3$. De la première expression on conclut que ce vecteur est dans E, de la deuxième qu'il est dans F. Il est donc dans $E \cap F$ et est donc un multiple de f_1. De sa deuxième expression on voit qu'il est aussi multiple de f_3, et on sait que f_1 et f_3 ne sont pas proportionnels : il est donc nul, donc $\nu = 0$. On a alors $\lambda f_1 + \mu f_2 = 0$ où (f_1, f_2) est libre, donc $\lambda = \mu = 0$.

Exercice 3

1) Je me dispense d'écrire le corrigé de cette question, sinon ça ne tiendra pas sur un recto-verso.

2) Il est visible que u et v ne sont pas proportionnels, donc (u, v) est libre. Comme $\mathbf{C}^2$ est de dimension 2, c'en est une base.

3) On explicite $\varphi(u) = (1 + i, -1 + i) = (1 + i)(1, i) = (1 + i)u$ et il saute alors aux yeux que u et $\varphi(u)$ sont proportionnels. De même pour v, pour lequel $\varphi(v) = (1 - i)v$..

4) a) Puisque (u, v) engendre $\mathbf{C}^2$, on peut introduire l'écriture suggérée. En utilisant la linéarité de φ, on en déduit que $\varphi(e) = (1 + i)\alpha u + (1 - i)\beta v$. Puisque $(e, \varphi(e))$ est supposé lié, ce dernier vecteur est proportionnel à e. Supposons les deux complexes α et β tous deux non nuls ; cette proportionnalité s'écrit alors :

$$\frac{(1 + i)\alpha}{\alpha} = \frac{(1 - i)\beta}{\beta},$$

ce qui est manifestement aberrant. C'est donc que $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$.

b) On va montrer la forme contraposée : soit e non nul tel que $(e, \varphi(e))$ soit lié, et montrons que l'une au moins des composantes de e n'est pas réelle. D'après la sous-question précédente (dont on reprend les notations), $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$, et comme on a supposé e non nul, ils ne sont pas nuls tous les deux. Supposons que $\alpha \neq 0$ mais $\beta = 0$, donc $e = (\alpha, i\alpha)$: il est alors impossible que les deux composantes de e soient simultanément réelles. On traite de même le cas où $\beta \neq 0$ mais $\alpha = 0$.

Exercice 4

1) Non. Prendre $f(x) = x^4$ et $g(x) = x^4 + x^6$ (on a choisi des puissances d'exposant pair pour ne pas être embêté par des annulations mais c'est très secondaire) : alors f et g sont toutes deux négligeables devant x^2 en 0 mais ne coïncident pourtant qu'en 0.

2) Oui. En effet la deuxième hypothèse garantit que $g(x) = o(x^2)$. La différence de deux fonctions négligeables devant x^2 est alors négligeable devant x^2. Enfin comme de façon évidente $x^2 - x^3 \sim x^2$, être négligeable devant x^2 ou devant $x^2 - x^3$, c'est kif-kif bourricot.

3) Oui. En effet si on quotiente les deux fonctions suggérées on obtient (pour x tendant vers 0 :

$$\frac{\operatorname{Arctan} x}{x - \frac{x^2}{6}} = \frac{x + o(x)}{x + o(x)} = \frac{1 + o(1)}{1 + o(1)} \to \frac{1}{1} = 1.$$

4) Oui : s'il existe un intervalle ouvert autour de 0 et une constante positive A telle que $|f| \leq A|g|$ sur cet intervalle, et un autre intervalle ouvert autour de 0 et une autre constante B telle que $|g| \leq B|h|$ sur cet intervalle, sur l'intersection des deux intervalles $|f| \leq AB|h|$.

5) Oui : une application linéaire satisfait à la condition de la question si et seulement si pour tout x de E, $u(x) = 0$, en d'autres termes si et seulement si u est l'application nulle. Celle-ci est par ailleurs linéaire. Il y a donc une et une seule application linéaire qui satisfait à la condition, à savoir l'application nulle.