NB La source de ce devoir est l'ouvrage *Problèmes corrigés de mathématiques supérieures* de Michel Quercia et François Ranty, consulté et consultable à la Bibliothèque Universitaire.

1) C'est une récurrence sur ki, absolument élémentaire : Il est clair que T_0 et T_1 sont premiers entre eux ; si l'affirmation proposée par l'énoncé est vraie pour un k fixé, on écrit $(*)$ en l'appliquant à $n = k$ et on constante que tout diviseur commun de T_{k+2} et T_{k+1} est aussi un diviseur de T_k, donc un diviseur commun de T_k et T_{k+1}, donc vu l'hypothèse de récurrence une constante. Les polynômes T_{k+2} et T_{k+1} sont donc premiers entre eux.

2) a) C'est encore de la récurrence, n et cette fois forte (pour montrer le résultat pour $n+2$, on a besoin de le supposer au moins pour $n+1$ et pour n) mais sans subtilité. On y découvre que $T_n(0) = 0$, $T_n(1) = 1$ et $T_n(-1) = (-1)^n$.

b) C'est une très facile récurrence (ordinaire) sur k pour l'hypothèse de récurrence :

$$(H_k) \qquad T_{2k}(X) = T_{2k}(-X) \text{ et } T_{2k+1}(X) = -T_{2k+1}(-X).$$

c) On le montre par récurrence forte sur le degré, en notant (H_k) l'hypothèse :

$$(H_k) \qquad \text{Le degré de } T_k \text{ est } k \text{ et son coefficient dominant } 2^{k-1}.$$

Cette hypothèse est manifestement vérifiée si $k = 1$ et si $k = 2$. Soit un $n \geq 3$, supposons (H_k) vérifiée pour tout k compris entre 1 et n, donc en particulier pour $k = n-1$ et $k = n-2$. On écrit alors $(*)$ pour $n-2$ et dans cette expression le degré de $2XT_{n-1}$ est n tandis que celui de $-T_{n-2}$ est strictement inférieur à n : le degré de leur somme est donc n, son coefficient dominant étant celui de $2XT_{n-1}$ c'est-à-dire 2^n.

Accessoirement le coefficient dominant de T_0, qui est 1, doit être précisé à part.

d) Dans l'esprit de la question, pour tout $n \geq 0$, notons $u_n = T_n(x)$.

Avec cette notation, la relation $(*)$ appliquée au réel x s'écrit :

$$u_{n+2} = 2xu_{n+1} - u_n.$$

On sait reconstituer les suites de cette forme : on les trouve en introduisant l'équation dite "caractéristique" à l'inconnue notée r :

$$r^2 = 2xr - 1$$

de discriminant $4(x^2 - 1) > 0$ vu l'hypothèse $1 < x$. Je n'écris pas les détails, on doit finir par conclure que :

$$u_n = \frac{1}{2}\left((x + \sqrt{x^2-1})^n + (x - \sqrt{x^2-1})^n\right).$$

3) a) On fixe un α et on fait une récurrence forte sur n. L'initialisation est sans piège ; lorsqu'on a supposé $(**)$ vrai pour toutes valeurs inférieures ou égales à $n+1$ (donc en particulier pour $n+1$ et n) c'est de la routine que de la vérifier pour $n+2$:

$$\begin{aligned}
T_{n+2}(\cos\alpha) &= 2\cos\alpha\cos((n+1)\alpha) - \cos(n\alpha) \\
&= 2\cos(\alpha)[\cos(n\alpha)\cos\alpha - \sin(n\alpha)\sin\alpha] - \cos(n\alpha) \\
&= (2\cos^2\alpha - 1)\cos(n\alpha) - 2\cos\alpha\sin\alpha\sin(n\alpha) \\
&= \cos(2\alpha)\cos(n\alpha) - \sin(2\alpha)\sin(n\alpha) = \cos((n+2)\alpha).
\end{aligned}$$

b) Soit Q un polynôme rendant vraie l'identité $(**)$. Pour tout α réel, on peut alors écrire :

$$(Q - T_n)(\cos\alpha) = Q(\cos\alpha) - T_n(\cos\alpha) = \cos(n\alpha) - \cos(n\alpha) = 0.$$

Ainsi pour tout α réel, $\cos\alpha$ est racine du polynôme $Q - T_n$. Or l'ensemble des valeurs prises par la fonction cosinus, égal à $[-1, 1]$, est infini. Le polynôme $Q - T_n$ a donc une infinité de racines : il est donc nul, d'où $Q = T_n$.

c) Vu la formule (**), la condition proposée équivaut à $\cos(n\alpha) = 0$, c'est-à-dire à l'existence d'un $k \in \mathbf{Z}$ tel que :

$$\alpha = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}.$$

d) Au vu de (**), on vérifie presque aussitôt que les valeurs proposées annulent T_n. De plus, comme fonction de k l'expression proposée est strictement croissante et à valeurs dans $[0, \pi]$, intervalle sur lequel le cosinus est strictement décroissante. Elles forment donc une suite (finie) strictement décroissante et en particulier sont deux à deux distinctes. On a trouvé n racines du polynôme T_n ; or celui-ci est de degré n : on les a donc toutes trouvées.

e) On commence par dériver (**) par rapport à α (pour un n fixé). On obtient :

$$T_n'(\cos\alpha) = \frac{n\sin(n\alpha)}{\sin\alpha}.$$

À partir de cette expression, on suit le même plan qu'à la question précédente. On cherche d'abord des α annulant cette formule ; conviennent les :

$$\alpha = \frac{k\pi}{n}$$

où k parcourt $\mathbf{Z} \setminus n\mathbf{Z}$ (on doit exclure les multiples de n pour que soit possible la division par $\sin(\alpha)$. Par le même argument qu'au d), les valeurs de la fonction cosinus en les α correspondant à $1 \leq k \leq n-1$ sont toutes distinctes et sont des racines de T_n'. Vu qu'elles sont $n-1$ qui est aussi le degré de T_n', on les a toutes trouvées.

4) a) On gratte aisément un demi-point en écrivant que $\Phi(X^k) = k^2X^k - k(k-1)X^{k-2}$.

b) Pour P de degré d, donc somme de monômes d'exposant inférieur ou égal à d, le polynôme $\Phi(P)$ est somme de polynômes de degré inférieur ou égal à d, donc lui-même de degré inférieur ou égal à d. Le monôme en X^d dans le polynôme $\Phi(P)$ provient du seul terme de plus haut degré de P et a pour coefficient βd^2 où on note β le coefficient dominant de P. Ceci prouve que dès que $d \geq 1$, le polynôme $\Phi(P)$ est exactement de degré d, et en particulier non nul.

Par ailleurs il est clair que si P est constant $\Phi(P) = 0$. Le noyau $\operatorname{Ker}\Phi$ est donc l'ensemble des polynômes constants.

5) a) Si P est de degré d et de coefficient dominant β,on a vu que $\Phi(P)$ est de degré inférieur ou égal à d, avec un terme en X^d ayant pour coefficient βd^2. Le coefficient de X^d dans $\Phi_\lambda(P)$ est donc égal à $\beta(d^2 - \lambda)$. Or ce coefficient est nul puisque $\Phi_\lambda(P) = 0$, donc $\lambda = d^2$.

b) Tout élément P de $\mathbf{R}_n[X]$ peut être écrit $\beta X^n + Q$, où β est un réel et Q de degré inférieur ou égal à $n-1$. Comme $\Phi_{n^2}(X^n) = 0$, $\Phi_{n^2}(P) = \Phi_{n^2}(Q) = \Phi(Q) - n^2Q$. Or on a vu plus haut que Φ diminue les degrés donc tant $\Phi(Q)$ que n^2Q sont dans $\mathbf{R}_{n-1}[X]$.

L'application Φ_{n^2} restreinte à $\mathbf{R}_n[X]$ n'est donc pas surjective. Comme elle est linéaire et qu'on est en dimension finie, elle n'est pas non plus injective, d'où l'existence cherchée.

c) Soit P un polynôme non nul de degré inférieur ou égal à $n-1$ et soit βX^d son terme dominant. Le coefficient de X^d dans $\Phi_{n^2}(P)$ est alors $\beta(d^2 - n^2)X^d$ qui n'est pas nul, donc $\Phi_{n^2}(P)$ n'est pas nul. On fonctionne alors exactement à l'envers de la façon dont on a fonctionné ci-dessus : la restriction de Φ_{n^2} à $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ est donc injective, donc elle est surjective.

d) La conjonction des résultats des c) et d) montre l'égalité :

$$\Phi_{n^2}\left(\mathbf{R}_n[X]\right) = \mathbf{R}_{n-1}[X].$$

La formule du rang permet d'en déduire que le noyau de la restriction est de dimension 1. Par le même calcul qu'au c), appliqué cette fois à un polynôme de degré strictement plus grand que n, on voit que l'image par Φ_{n^2} d'un polynôme non nul dont le degré n'est pas exactement n n'est pas nulle. Le noyau de Φ_{n^2} est donc inclus dans $\mathbf{R}_n[X]$ donc égal au noyau de sa restriction à cet espace de dimension fini : il est donc lui aussi de dimension 1.

6) On dérive deux fois la formule (∗∗). On obtient :

$$\cos\alpha T_n'(\cos\alpha) - \sin^2\alpha T_n''(\cos\alpha) = n^2\cos(n\alpha)$$

qu'on peut réécrire :

$$\cos\alpha T_n'(\cos\alpha) - (1-\cos^2\alpha)T_n''(\cos\alpha) - n^2 T_n(\alpha) = 0.$$

Dit autrement, tous les $\cos\alpha$ sont racines du polynôme $XT_n' + (X^2-1)T_n'' - n^2 T_n$ c'est-à-dire du polynôme $\Phi_{n^2}(T_n)$. Celui-ci a donc une infinité de racines : il est donc nul.

7) a) On calcule immédiatement $T_n(x_k)$ grâce à la formule (∗) et on trouve que $T_n(x_k) = \cos(k\pi) = (-1)^k$.

b) Pour k pair, $Q(x_k) = 1 - P(x_k)$ où par hypothèse $P(x_k) \leq 1$, donc $0 \leq Q(x_k)$. Au contraire pour k impair, on trouve $Q(x_k) \leq 0$.

c) Pour $1 \leq k \leq n$, on notera $I_k = [x_k, x_{k-1}]$ l'intervalle d'extrémités x_k et x_{k-1}.
Commençons par donner une solution fausse mais instructive : la fonction polynomiale associée à Q est continue sur chaque intervalle I_k, et prend des valeurs de signes opposés aux deux bornes de l'intervalle. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc un $c_k \in I_k$ tel que $Q(c_k) = 0$. Les n valeurs c_k $(1 \leq k \leq n)$ sont dès lors n racines pour Q. La solution est fausse, car rien ne dit qu'il y a bien n valeurs : il se pourrait par exemple que $c_2 = c_3 = x_3$, et on n'aurait au total trouvé au plus $n-1$ racines.
Passons à quelque chose de juste. Il y a plusieurs façons de faire, aucune n'étant très simple. Dans ce corrigé, on va procéder en remplaçant les x_k par des x_k' qui en restent proches. Précisément, pour chaque k entre 0 et n, on définit x_k' de la façon suivante : si $Q(x_k)$ n'est pas nul, on prend $x_k' = x_k$. Si $Q(x_k) = Q(x_k') = 0$, on prend là encore $x_k' = x_k$. Enfin, si $Q(x_k)$ est nul mais si $Q(x_k')$ ne l'est pas, la fonction polynomiale associée à Q, qui est de classe $\mathcal{C}^1$ est alors strictement monotone dans un intervalle contenant x_k. On prendra x_k' dans cet intervalle, le côté où on le prend étant choisi de sorte que le signe soit celui de $(-1)^k$ mais qu'en outre on ait $Q'(x_k') \neq 0$. En outre, on veille à prendre chaque x_k' ainsi modifié assez près de x_k pour que la suite des (x_k') reste ordonnée comme l'était celle des (x_k). On applique alors le raisonnement de la "solution fausse" à la nouvelle suite d'intervalles (I_k') ayant les x_k' pour bornes. Les collisions des c_k' qu'on obtient alors avec les bornes des intervalles sont devenues plus rares, mais ne sont toujours pas impossibles puisque parmi les x_k non déplacés certains vérifiaient $Q(x_k) = 0$. Toutefois un tel x_k est atteint au plus deux fois : on peut au plus avoir $c_{k-1} = x_k' = x_k = c_k$. Mais alors, comme $Q'(x_k) = 0$, ce point répété deux fois parmi la liste de racines trouvées est par ailleurs une racine double de Q. L'énumération des c_k', malgré ses éventuels bégaiements, est donc bien une liste de racines énumérées avec multiplicité.

d) L'hypothèse sur le coefficient dominant de P assure qu'il est égal à celui de T_n, donc que les termes en X^n s'anéantissent quand on fait la soustraction $T_n - P$. Le polynôme Q est donc de degré inférieur ou égal à $n-1$. Or on vient de lui trouver n racines (avec multiplicité). Il est donc nul.

8) On va commencer par traiter le cas d'égalité : supposons donc que $\mathrm{Sup}_{-1\leq x\leq 1}|S(x)| = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
On introduit alors le polynôme $P = 2^{n-1}S$; puisque S est unitaire, le coefficient dominant de P est 2^{n-1} et vu la valeur maximale atteinte par $|P|$ la fonction polynomiale associée à P prend des valeurs plus petites que 1 en valeur absolue sur $[-1,1]$. La question 7) est applicable et on en déduit que $P = T_n$, et donc $S = \dfrac{T_n}{2^{n-1}}$.
Notons aussi que la réciproque est vraie : vu la formule (∗∗), le maximum de $|T_n|$ sur $[-1,1]$ vaut 1, donc le polynôme $S = \dfrac{T_n}{2^{n-1}}$ vérifie le cas d'égalité.

Supposons maintenant qu'on ait une inégalité stricte : $\mathrm{Sup}_{-1\leq x\leq 1}|S(x)| < \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
Pour $\epsilon > 0$ assez petit (plus petit que la différence entre les deux réels apparaissant à l'inégalité qui précède), le polynôme $S_1 = S + \epsilon$ vérifie aussi cette inégalité, est aussi de degré n et est aussi unitaire. Comme dans l'étude du cas d'égalité, on pose $P = 2^{n-1}S$ et aussi $P_1 = 2^{n-1}S_1$. On peut reprendre le raisonnement du cas d'égalité et on en déduit que S aussi bien que S_1 est égal à T_n. Mais ceci entraîne que leur différence, soit ϵ, est nulle, ce qui est absurde. L'inégalité stricte est donc impossible.
En conclusion, l'égalité large à prouver est bien remplie par S, et est une égalité si et seulement si $S = \dfrac{T_n}{2^{n-1}}$.