Exercice 1

1) a) Simple calcul dont j'écris seulement ici les étapes intermédiaires :

$$\int_0^1 (t^4-2t^3+t^2)g^{(4)}(t)\,dt = -\int_0^1 (4t^3-6t^2+2t)g^{(3)}(t)\,dt$$
$$= \int_0^1 (12t^2-12t+2)g''(t)\,dt = -\int_0^1 (24t-12)g'(t)\,dt = 24\int_0^1 g(t)\,dt.$$

b) Pour tout $t \in [0,1]$, $-M \leq g^{(4)}(t) \leq M$.
Par ailleurs, pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leq t^4-2t^3+t^2 = t^2(1-t)^2$.
En multipliant l'inégalité de la première ligne par le réel de la deuxième, on a donc :

$$-M \leq (t^4-2t^3+t^2)g^{(4)}(t) \leq M.$$

On intègre cette inégalité entre 0 et 1, on obtient :

$$-M\int_0^1 (t^4-2t^3+t^2)\,dt \leq \int_0^1 (t^4-2t^3+t^2)g^{(4)}(t)\,dt \leq M\int_0^1 (t^4-2t^3+t^2)\,dt$$

c'est-à-dire, en rapprochant le terme central du a) et en calculant l'intégrale de polynôme qui participe à l'encadrement :

$$-\frac{M}{30} \leq 24\int_0^1 g(t)\,dt \leq \frac{M}{30}.$$

Il n'y a plus qu'à diviser par 24 pour conclure.

2) La linéarité est banale, je ne l'écris pas. La matrice attendue est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3) a) Puisque $\varphi(P)=0$, en particulier $P(0)=P'(0)=0$. Le réel 0 est donc une racine au moins double de P et donc X^2 divise P. En remarquant de même que 1 est racine au moins double de P (vu $P(1)=P'(1)=0$), on conclut que $(X-1)^2$ aussi divise P.

b) Les deux polynômes X^2 et $(X-1)^2$ sont premiers entre eux et divisent tous deux P : leur produit $X^2(X-1)^2$ divise donc également P. Mais comme le degré de P est inférieur ou égal à 3, ceci entraîne que $P=0$.

4) On a montré à la question précédente que l'application linéaire φ est injective. On note en outre que son espace de départ et son espace d'arrivée sont tous deux de même dimension finie (à savoir 4). Elle est donc surjective.

5) La vérification de la linéarité de i est sans difficulté, on sait par ailleurs que la réciproque d'une bijection linéaire est linéaire, ainsi que la composée de deux applications linéaires : $i\circ\varphi^{-1}$ est donc elle aussi linéaire.
Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à 3. La matrice-colonne des coordonnées de $\varphi(P)$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^4$ est $\begin{pmatrix} P(0) \\ P'(0) \\ P'(1) \\ P(1) \end{pmatrix}$; la matrice de $(i\circ\varphi^{-1})[\varphi(P)]$ est donc :

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} P(0) \\ P'(0) \\ P'(1) \\ P(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aP(0)+bP'(0)+cP'(1)+dP(1) \end{pmatrix}.$$

Mais par ailleurs cette matrice est $\left((i\circ\varphi^{-1})[\varphi(P)] \right) = \left(i(P) \right) = \left(\int_0^1 P(t)\,dt \right)$.
D'où l'identité à montrer, en rapprochant les (uniques) coefficients de ces deux matrices (1,1).

6) L'identité proposée s'obtient immédiatement par le changement de variable $s = 1 - t$. Si on calcule les deux intégrales ainsi prouvées égales par la formule de la question précédente, on obtient l'identité suivante, valable pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à 3 :

$$aP(0) + bP'(0) + cP'(1) + dP(1) = aP(1) - bP'(1) - cP'(0) + dP(0).$$

Appliquons cette identité à $P = \varphi^{-1}(1, 0, 0, 0)$: nous obtenons $a = d$. Apliquons là à $P = \varphi^{-1}(0, 1, 0, 0)$: nous obtenons $b = -c$.

7) a) En appliquant $(*)$ à $P = 1$, on trouve : $1 = a + d$. Comme on a montré que $a = d$, on en déduit $a = 1/2$.

b) En recommençant avec $P = X^2$, on trouve $\dfrac{1}{3} = 2c + d$ et on en déduit que $c = -1/12$ donc $b = 1/12$ vu la relation $b = -c$.

8) a) Les relations exigées reviennent à demander que $\varphi(H) = (f(0), f'(0), f'(1), f(1))$. Ceci a une solution et une seule, puisque φ est bijective.

b) On remarque d'abord que la dérivée quatrième de la fonction polynomiale associée à H est nulle, puisque H est du troisième degré au plus. La borne de la dérivée quatrième de f est donc aussi une borne de la dérivée quatrième de la fonction $f - H$ (qui est elle aussi de classe $\mathcal{C}^4$).

Quant au machin avec des fractions au milieu de la formule, c'est bien sûr $\int_0^1 H(t)\,dt$ recalculé à partir de (*), en utilisant les coefficients calculés au 7) et en remplaçant les valeurs ou dérivées de H par celles de f au vu du a).

Exercice 2

1) Ce sont de simples questions de cours. Les réponses attendues étaient :

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt \qquad \text{et} \qquad S_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

2) a) Comme $0 \leq t$, $t/2 \leq t$ donc $t/2 \leq t \leq x$, on peut écrire : $0 \leq x - t \leq x - t/2 = (2x - t)/2$. Il ne reste plus qu'à élever à la puissance n cette inégalité entre réels positifs.

b) Grâce à l'hypothèse initiale (positivité de toutes les dérivées de f et en particulier de la $n+1$-ème), on peut majorer $R_n(x)$ à l'aide de l'inégalité du a) et obtenir :

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt \leq \int_0^x \frac{(2x-t)^n}{2^n\, n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Sur cette expression on fait des manipulations très simples, en sortant un facteur constant de l'intégrale et en majorant $2x - t$ par $2x$ (on profite encore une fois que les autres facteurs sous l'intégrale sont tous positifs) :

$$\int_0^x \frac{(2x-t)^n}{2^n\, n!} f^{(n+1)}(t)\,dt = \frac{1}{n2^n} \int_0^x \frac{(2x-t)(2x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n+1)}(t)\,dt \leq \frac{2x}{n2^n} \int_0^x \frac{(2x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Enfin on majore la dernière intégrale par une intégrale sur un intervalle plus large, profitant une dernière fois de la positivité de ce qu'elle contient (cette fois de la positivité sur $[x, 2x]$) :

$$\frac{2x}{n2^n} \int_0^x \frac{(2x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n+1)}(t)\,dt \leq \frac{2x}{n2^n} \int_0^{2x} \frac{(2x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n+1)}(t)\,dt = \frac{2x}{n2^n} S_n(2x).$$

c) Il suffit de revenir à la définition de $S_n(2x)$ en la regroupant sous la forme :

$$f'(2x) - S_n(2x) = f'(0) + \frac{f''(0)}{1!} x + \frac{f'''(0)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{(n-1)!} x^{n-1}.$$

Dans cette écriture, tous les coefficients sont positifs comme valeurs de dérivées de f : elle fournit bien un nombre positif.

d) On rentre la majoration du c) dans l'inégalité du b) ; le réel $R_n(x)$ est alors encadré entre deux gendarmes qui tendent tous deux vers 0 de façon évidente.