

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si un étudiant est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre. Les exercices sont réputés indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. À l'intérieur d'un exercice, lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qu'il lui était demandé de démontrer

Exercice 1

Dans cet exercice, on notera $\mathbf{R}_3[X]$ l'espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, et on conviendra que sa base canonique est $(1, X, X^2, X^3)$.

1) Soit g une application de classe C^4 de $[0, 1]$ vers $\mathbf{R}$ qui vérifie les conditions suivantes :

$$g(0) = g'(0) = g'(1) = g(1) = 0.$$

a) Par une succession d'intégrations par partie, montrer que :

$$\int_0^1 (t^4 - 2t^3 + t^2)g^{(4)}(t) dt = 24 \int_0^1 g(t) dt.$$

b) En déduire que, si on note $M = \max_{t \in [0, 1]} |g^{(4)}(t)|$:

$$\left| \int_0^1 g(t) dt \right| \leq \frac{M}{720}.$$

Dans la suite de l'exercice, on note φ l'application de $\mathbf{R}_3[X]$ vers $\mathbf{R}^4$ définie pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à 3 par :

$$\varphi(P) = (P(0), P'(0), P'(1), P(1))$$

et i l'application de $\mathbf{R}_3[X]$ vers $\mathbf{R}$ définie pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à 3 par :

$$i(P) = \int_0^1 P(t) dt.$$

2) Montrer que φ est linéaire, et écrire sa matrice dans les bases canoniques de $\mathbf{R}_3[X]$ et de $\mathbf{R}^4$.

3) Soit P un élément de $\text{Ker } \varphi$.

a) Montrer que X^2 et $(X - 1)^2$ divisent P .

b) Montrer que $P = 0$.

4) Montrer que φ est une bijection.

5) Montrer que i est linéaire, puis que $i \circ \varphi^{-1}$ est linéaire. On note $(a \ b \ c \ d)$ la matrice de $i \circ \varphi^{-1}$ dans les bases canoniques de $\mathbf{R}^4$ et $\mathbf{R}$; montrer qu'avec cette notation, pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à 3 :

$$(*) \quad \int_0^1 P(t) dt = aP(0) + bP'(0) + cP'(1) + dP(1).$$

6) En remarquant que :

$$\int_0^1 P(1-t) dt = \int_0^1 P(t) dt,$$

montrer que $d = a$ et $c = -b$.

7) a) En appliquant (*) au polynôme constant 1, calculer a .

b) En appliquant ensuite (*) au polynôme X^2 , calculer b .

8) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^4$ de $[0, 1]$ vers $\mathbf{R}$.

a) Montrer qu'il existe un et un seul polynôme H de degré inférieur ou égal à 3 tel que :

$$f(0) = H(0), f'(0) = H'(0), f'(1) = H'(1) \text{ et } f(1) = H(1).$$

b) On note $M = \max_{t \in [0,1]} |f^{(4)}(t)|$. En appliquant la question 1) à $f - H$ montrer que :

$$\int_0^1 f(t) dt - \frac{f(0) + f(1)}{2} - \frac{f'(0) - f'(1)}{12} \leq \frac{M}{720}$$

Exercice 2

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbf{R}^+$ vers $\mathbf{R}$. On suppose que f vérifie pour tout $x \geq 0$ et tout $n \geq 1$ la propriété :

$$f^{(n)}(x) \geq 0.$$

Pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$, on notera :

$$R_n(x) = f(x) - f(0) - \frac{f'(0)}{1!}x - \frac{f''(0)}{2!}x^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

et

$$S_n(x) = f'(x) - f'(0) - \frac{f''(0)}{1!}x - \frac{f'''(0)}{2!}x^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}.$$

1) a) Écrire l'expression de $R_n(x)$ fournie par application de la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction f . (On utilisera la version de la formule faisant apparaître une intégrale de bornes 0 et x).

b) Écrire l'expression de $S_n(x)$ fournie par application de la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction f' . (On utilisera la version de la formule faisant apparaître une intégrale de bornes 0 et x).

2) a) Montrer que pour tous t et x vérifiant $0 \leq t \leq x$ et tout $n \geq 1$:

$$(x-t)^n \leq \frac{(2x-t)^n}{2^n}.$$

b) En déduire que pour tout $n \geq 1$ et tout $x \geq 0$:

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{2x}{n2^n} S_n(2x).$$

c) Montrer que pour tout $n \geq 1$ et tout $x \geq 0$:

$$S_n(2x) \leq f'(2x).$$

d) On fixe un $x \geq 0$. Montrer que $R_n(x) \rightarrow 0$ quand n tend vers $+\infty$.