Exercice 162
Calculer :

a) $\displaystyle\int \ln x\,dx$ b) $\displaystyle\int \operatorname{Arctan} x\,dx$ c) $\displaystyle\int_0^1 (x^3+1)e^{-x}\,dx$ d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx$

Exercice 163
Calculer :

a) $\displaystyle\int xe^{1+x^2}\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi$ c) $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$

Exercice 164
1) Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ continue. Montrer que :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx.$$

2) En déduire les valeurs de :

$$\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan\theta)\,d\theta \text{ et } \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3\varphi}{\sin^3\varphi+\cos^3\varphi}\,d\varphi.$$

3) Le résultat de la première question est-il vrai ou faux si on suppose seulement f continue par morceaux ? Démonstration ou contre-exemple.

Exercice 165
En utilisant le changement de variable $t = \pi - x$, calculer :

$$\int_0^{\pi} x\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx.$$

Exercice 166
Calculer :

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}$ (poser $t = e^{-x}$) b) $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$ (poser $t = \sqrt{x+1}$) c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$ (poser $t = \sqrt{2}/x$)

d) $\displaystyle\int x^2\ln(x^6-1)\,dx$ (poser $t = x^3$) e) $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)dx$ f) $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$

Exercice 167
Calculer la dérivée $\dfrac{d}{d\varphi}[\ln(|\tan\varphi|)]$.
En déduire :

a) $\displaystyle\int \frac{d\theta}{\sin\theta}$ b) $\displaystyle\int \frac{d\theta}{\cos\theta}$ c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\cos\theta+\sin\theta}$

Exercice 168
Pour tout $n \geq 1$, on pose :

$$I_n = \frac{1}{n!}\int_0^2 (2-x)^n e^x\,dx.$$

1) Calculer I_1.
2) Montrer que pour tout $n \geq 1$:

$$0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!}(e^2-1).$$

3) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $I_{n+1} = I_n - \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}$.

4) Montrer que pour tout $n \geq 1$:

$$e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n}{n!} + I_n.$$

5) Montrer que $\dfrac{2^n}{n!}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

6) Montrer que :

$$1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n}{n!} \to e^2 \qquad \text{quand } n \to \infty$$

Exercice 169

Pour $n \geq 0$, soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$.

1) Calculer I_0 et I_1.

2) Montrer que pour $n = 2k$ pair

$$I_{2k} = \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2k-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2k)} \frac{\pi}{2}$$

et que pour $n = 2k+1$ impair

$$I_{2k+1} = \frac{2 \times 4 \times \cdots \times (2k)}{3 \times 5 \times \cdots \times (2k+1)}$$

3) Montrer que I_n est une fonction décroissante de n.

4) Montrer que quand $k \to +\infty$

$$\frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{7} \times \cdots \times \frac{2k}{2k-1} \times \frac{2k}{2k+1} \to \frac{\pi}{2} \qquad \text{(c'est la “formule de Wallis”).}$$

Exercice 170

Résoudre sur $]-\infty, 0[$ l'équation différentielle suivante, où l'inconnue est y, fonction dérivable d'une variable réelle notée t :

$$2t(1-t)y' + (1-t)y = 1.$$

Exercice 171

Calculer :

a) $\displaystyle\int \frac{d\theta}{\cos^2\theta \sin^2\theta}$ b) $\displaystyle\int (\operatorname{Arcsin} x)^2 \, dx$ c) $\displaystyle\int \frac{dt}{(\operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t)^n}$ d) $\displaystyle\int \ln(x^2+2) \, dx$ e) $\displaystyle\int \frac{1+x+x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$

f) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x} \, dx$ g) $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\cos x} \, dx$ h) $\displaystyle\int \frac{\varphi d\varphi}{\cos^2\varphi}$ i) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{t+7}{t+6}} \, dt$ j) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x\sin x + \cos x)^2} \, dx$

Exercice 172

Soit trois nombres réels a, b et c (avec $a \neq 0$). Donner, en fonction du signe de a et de celui du discriminant $b^2 - 4ac$ une expression pour

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$