Exercice 121
Soit $u : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'endomorphisme défini par :
pour tout $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$,

$$u(x, y, z) = (-y + 2z, 2x - 3y + 4z, x - y + z)$$

et soit $v = u + Id_{\mathbf{R}^3}$.

1) Déterminer une base de $\operatorname{Ker} u$.

2) Quel est le rang de u ?
Déterminer une représentation cartésienne de $\operatorname{Im} u$.

3) Écrire la matrice de v dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Quel est le rang de v ? Quelle est la dimension de $\operatorname{Ker} v$?

4) Montrer que pour tout x de $\operatorname{Ker} v$, $u(-x) = x$; en déduire que $\operatorname{Ker} v \subset \operatorname{Im} u$, puis que $\operatorname{Ker} v = \operatorname{Im} u$.

5) Montrer que $\operatorname{Ker} v \cap \operatorname{Ker} u = \{0\}$.

6) Montrer que pour tout $x \in \operatorname{Ker} u$, $u^3(x) = u(x)$, et que pour tout $x \in \operatorname{Ker} v$, $u^3(x) = u(x)$.

7) Montrer que $u^3 = u$.

Exercice 122
Soit E un espace vectoriel de dimension 4 et soit (e_1, e_2, e_3, e_4) une base de E.
Soit u l'endomorphisme de E défini par :

$$u(e_1) = e_2 + e_3, \qquad u(e_2) = -e_1 - e_2 + e_4, \qquad u(e_3) = e_1 + e_2 - e_4, \qquad u(e_4) = -e_1 + e_3 + e_4.$$

1) Pour chacun des vecteurs e_i de la base (e_1, e_2, e_3, e_4), calculer $u^2(e_i)$ (où on note $u^2 = u \circ u$). En déduire que $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$.

2) On pose $f_1 = u(e_1)$ et $f_2 = u(e_4)$. Montrer que (f_1, f_2) est une base de $\operatorname{Im} u$.

3) Montrer que $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} u$.

4) On pose $f_3 = e_1 + e_4$ et $f_4 = e_1 - e_4$. Soit F le sous-espace de E engendré par (f_3, f_4).
Montrer que $F \cap \operatorname{Im} u = \{0\}$.
En déduire que la restriction $u_{|F}$ de u à F est une application linéaire bijective de F sur $\operatorname{Im} u$.
Montrer que $E = \operatorname{Im} u \oplus F$. En déduire que (f_1, f_2, f_3, f_4) est une base de E.

5) Pour un vecteur x de E écrit dans la base (f_1, f_2, f_3, f_4) sous la forme :

$$x = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4$$

exprimer $u(x)$ dans cette même base.

Exercice 123
Soit u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Montrer, en calculant le moins possible, que $\operatorname{Ker} u$ est une droite.

2) Déterminer une base a de $\operatorname{Ker} u$.

3) On note $b = (1, 1, 1)$ et $c = (1, 2, 0)$. Montrer que (a, b, c) est une base de $\mathbf{R}^3$ et expliciter la matrice de u dans la base (a, b, c).

4) On note E le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ engendré par b et c.

a) On note v la restriction de u, de E vers $\mathbf{R}^3$. Expliciter la matrice de v dans (b, c) et (a, b, c).

b) Montrer que cela a un sens de considérer l'application w, restriction de u de E vers E, et expliciter la matrice de w dans la base (b, c).

Exercice 124

1) Donner un exemple d'endomorphisme f de $\mathbf{R}^2$ tel que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$.

2) Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. Montrer l'équivalence :

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f \iff f \circ f = 0 \text{ et } \dim E = 2 \operatorname{rg}(f).$$

Exercice 125

Soit E un espace vectoriel de dimension finie ; soit f un endomorphisme de E.

1) Montrer les inclusions :

$$\operatorname{Im}(f \circ f) \subset \operatorname{Im} f \text{ et } \operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(f \circ f).$$

2) Montrer l'équivalence :

$$\operatorname{Im}(f \circ f) = \operatorname{Im} f \iff \operatorname{Ker}(f \circ f) = \operatorname{Ker} f.$$

3) Montrer l'équivalence :

$$\operatorname{Ker}(f \circ f) = \operatorname{Ker} f \iff E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f.$$

Exercice 126

Soit E, F deux espaces vectoriels de dimension finie.

1) Soit f et g deux applications linéaires de E dans F.
Montrer que :

$$|\operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g)| \leq \operatorname{rg}(f+g) \leq \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g).$$

2) Soit u et v deux endomorphismes de E.

a) On suppose que $u \circ v = 0$ et que $u + v$ est bijectif.
Montrer que :

$$\operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v) = \dim E.$$

b) Montrer que :

$$\dim[\operatorname{Ker}(u \circ v)] \leq \dim[\operatorname{Ker} u] + \dim[\operatorname{Ker} v].$$

En déduire que :

$$\operatorname{rg}(u \circ v) \geq \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v) - \dim E.$$

Exercice 127

Soit E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie.
Soit f une application linéaire de E vers F et g une application linéaire de E vers G.
Montrer l'équivalence de :

(i) $\operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker} f$.

et

(ii) Il existe une application linéaire h de G vers F telle que $f = h \circ g$.