PROGRAMME TRAITE EN COURS DE CALCUL INTEGRAL
Automne 2010

Lundi 13 septembre 2010

1. INTRODUCTION À L'INTÉGRALE DE LEBESGUE : Intégrale de Riemann, insuffisance de l'intégrale de Riemann (une fonction Riemann intégrable est bornée, une limite simple de fonctions Riemann intégrables n'est pas nécessairement Riemann intégrable). Présentation de la méthode utilisée par Lebesgue pour intégrer les fonctions bornées sur un segment compact. Cas de la fonction de Dirichlet.
2. RAPPELS SUR LA THÉORIE DES ENSEMBLES : Vocabulaire de la théorie des ensembles. Dénombrabilité (une partie d'un ensemble dénombrable est dénombrable, un produit de deux ensembles dénombrables est dénombrable, une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable).
3. TRIBU SUR UN ENSEMBLE : Définition d'une tribu. Premiers exemples (tribu des parties d'un ensemble, tribu des parties dénombrables ou co-dénombrables d'un ensemble).

Lundi 20 septembre 2010

1. FIN DES TRIBUS : Tribu engendrée par une classe de parties. Tribu Borélienne. La tribu Borélienne de $\mathbb{R}$ est engendrée par les intervalles ouverts. La tribu Borélienne de $\mathbb{R}^p$ est engendrée par les pavés bornés.
2. DÉBUT DES ESPACES MESURÉS : Définition d'une mesure positive. Exemples (mesure de comptage, masse de Dirac, mesures discrètes sur un ensemble). Espaces mesurés (finis, σ-finis, de probabilité). Propriétés élémentaires des mesures (croissance de la mesure, mesure de la réunion d'une suite croissante de parties mesurables, de l'intersection d'une suite décroissante, sous-additivité dénombrable). Ensemble de mesure nulle.

Lundi 27 septembre 2010

1. COMPLÉTÉ D'UN ESPACE MESURÉ : Les sous-ensembles qui sont réunion d'un ensemble de mesure nulle et d'un ensemble mesurable forment une tribu. Ensembles $\mu-$mesurables. Mesure des ensembles $\mu-$mesurables.
2. CONSTRUCTION DE LA MESURE DE LEBESGUE DE $\mathbb{R}^p$: Mesure d'un pavé de $\mathbb{R}^p$. Définition d'une algèbre de parties sur un ensemble. Les réunions finies de pavés de $\mathbb{R}^p$ forment une algèbre. Définition d'une mesure positive sur une algèbre. Mesure de Lebesgue d'une réunion finie de pavés (pour une telle réunion, on peut supposer que les pavés sont deux à deux disjoints ; la somme des mesures de ces pavés disjoints est bien définie et elle est finiment additive). Démonstration complète, dans le cas $p = 1$, du fait que la mesure de Lebesgue sur l'algèbre des réunions finies de pavés possède la propriété de σ-additivité. Démonstration de Borel-Lebesgue. Énoncé du théorème d'extension de Hahn (existence, sous une hypothèse de σ-finitude, d'un prolongement unique d'une mesure positive sur une algèbre de parties à la tribu engendrée par cette algèbre). Application de ce théorème à la définition de la mesure de Borel sur $\mathbb{R}^p$. Définition de la mesure supérieure. Énoncé du théorème de prolongement de Lebesgue (la mesure supérieure, restreinte aux parties qui « partitionnent additivement » $\mathbb{R}^p$ du point de vue de la mesure supérieure, fournit l'extension de la mesure de Borel aux parties Lebesgue-mesurables).

Lundi 4 octobre 2010

1. FIN DE LA CONSTRUCTION DE MESURES : Démonstration complète du théorème de Hahn. Un ensemble Lebesgue mesurable est la réunion d'un Borélien de $\mathbb{R}^p$ et d'un sous-ensemble négligeable de $\mathbb{R}^p$. Caractérisation des sous-ensembles négligeables de $\mathbb{R}^p$ par la possibilité, pour tout $\varepsilon > 0$, de les recouvrir par une réunion dénombrable de pavés dont la somme des volumes est $\leq \varepsilon$.
2. EXEMPLE D'ENSEMBLE NON LEBESGUE MESURABLE : Invariance par translation de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Le sous-ensemble de $[0,1]$ que constitue une transversale fidèle pour la relation d'équivalence : $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$ n'est pas Lebesgue mesurable (démonstration complète).

Lundi 11 octobre 2010

1. FONCTIONS MESURABLES : Définition. Fonctions Boréliennes, fonctions μ-mesurables, fonctions numériques (à valeurs dans la droite numérique achevée). Caractérisation de la mesurabilité en

utilisant des générateurs de la tribu des ensembles mesurables dans l'espace but. Caractérisation des fonctions numériques μ-mesurables. Une fonction égale μ-presque partout à une fonction μ-mesurable est elle-même μ-mesurable. Un ensemble est μ-mesurable si et seulement si sa fonction caractéristique est μ-mesurable.

2. THÉORÈMES DE STABILITÉ : La composée de deux fonctions mesurables est mesurable. Application : si f est μ-mesurable et α continue, alors $\alpha \circ f$ est μ-mesurable. Si f est μ-mesurable, alors $|f|, f_+, f_-$ le sont également. Exemple de fonction non Lebesgue-mesurable, mais de module Lebesgue-mesurable. Somme, produit de fonctions $\mu-$mesurables réelles. Fonctions étagées $\mu-$mesurables. Si $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions mesurables, alors $Sup_n f_n$, $Inf_n f_n$ sont mesurables. Une limite simple μ-presque partout de fonctions μ-mesurables est μ-mesurable. Une limite simple (ou la somme d'une série) de fonctions numériques μ-mesurables est μ-mesurable.

Lundi 18 octobre 2010

1. FIN DES FONCTIONS MESURABLES : Toute fonction μ-mesurable positive est limite simple d'une suite croissante de fonctions simples. Lorsque la fonction est bornée, la limite est uniforme.

2. INTÉGRALE SUPÉRIEURE D'UNE FONCTION POSITIVE : Intégrale supérieure d'une fonction simple positive. Additivité de cette intégrale supérieure. Intégrale supérieure d'une fonction μ-mesurable positive. Propriétés élémentaires de l'intégrale supérieure. Théorème de convergence monotone pour les fonctions mesurables positives. Additivité dénombrable de l'intégrale supérieure des fonctions positives (interversion des signes intégrale et somme).

3. FONCTIONS INTÉGRABLES : Définition des fonctions intégrables.

Lundi 25 octobre 2010

1. INTÉGRALE DES FONCTIONS INTÉGRABLES : Exemples de fonctions μ-intégrables (une fonction μ-mesurable bornée à support de mesure finie est μ-intégrable ; une fonction continue à support compact est intégrable sur $\mathbb{R}^p$, fonctions simples μ-intégrables). Définition de l'intégrale d'une fonction μ-intégrable. Positivité de l'intégrale, majoration du module de l'intégrale par l'intégrale du module. Une fonction μ-intégrable est finie μ-presque partout. Si $\int_X |f| d\mu = 0$, alors f est nulle μ-presque partout.

2. ESPACE DES FONCTIONS INTÉGRABLES : Fonctions égales presque partout. L'espace $L^1(X,\mu)$. C'est un espace vectoriel, normé par $\|f\|_1 = \int_X |f| d\mu$. L'intégrale se prolonge à $L^1(X,\mu)$, et définit une forme linéaire continue sur $L^1(X,\mu)$. Toute suite de Cauchy de $L^1(X,\mu)$ possède une sous-suite qui converge vers une fonction μ-intégrable à la fois presque partout et en moyenne d'ordre 1.

Lundi 8 novembre 2010

1. FIN DE L'ESPACE DES FONCTIONS INTÉGRABLES : L'espace $L^1(X,\mu)$ est complet pour la norme $\|f\|_1 = \int_X |f| d\mu$. Le sous-espace des fonctions simples et intégrables est dense dans $L^1(X,\mu)$. Commentaire sur la construction de l'intégrale en prolongeant l'intégrale des fonctions simples et intégrables au séparé complété de cet espace.

2. THÉORÈMES DE CONVERGENCE : De toute suite $(f_n)_n$ convergeant vers f dans $L^1(X,\mu)$ on peut extraire une sous-suite qui converge vers f $\mu-$presque partout. Exemple montrant que $(f_n)_n$ ne converge pas nécessairement vers f $\mu-$presque partout. Théorème de convergence de Beppo-Lévi faible. Théorème de convergence dominée de Lebesgue.

Lundi 15 novembre 2010

1. FIN DES THÉORÈMES DE CONVERGENCE : Interversion des signes de sommation des séries et d'intégration, sous des conditions de domination.

2. COMPARAISON DES INTÉGRALES DE RIEMANN ET DE LEBESGUE : Rappel sur l'intégrale de Riemann. Une fonction Riemann-intégrable sur un intervalle compact $[a,b]$ est Lebesgue-intégrable sur $[a,b]$, et son intégrale au sens de Lebesgue coïncide avec l'intégrale de Riemann. Le cas des fonctions réglées,

qui sont Riemann-intégrables et n'ont qu'un nombre au plus dénombrable de points de discontinuité. La caractérisation de Lebesgue des fonctions Riemann-intégrables.

3. INTÉGRALES SEMI-CONVERGENTES ET INTÉGRALE DE LEBESGUE : Définition de l'intégrale convergente d'une fonction sur un intervalle non compact. Intégrales absolument convergentes. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ est convergente, mais pas absolument convergente. Une fonction Riemann-intégrable sur tout intervalle compact d'un intervalle non compact I est Lebesgue-intégrable sur I si et seulement si son intégrale sur I est absolument convergente. Dans ce cas, son intégrale de Lebesgue coïncide avec son intégrale généralisée sur I.

4. FONCTIONS DÉFINIES PAR DES INTÉGRALES : Notion d'intégrale à paramètre. Théorème de continuité d'une fonction définie par une intégrale (la démonstration sera faite la prochaine fois).

Lundi 22 novembre 2010

1. FIN DES FONCTIONS DÉFINIES PAR DES INTÉGRALES : Théorèmes de continuité et de dérivabilité des intégrales dépendant d'un paramètre. Exemple d'application : calcul de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ par résolution de l'équation différentielle vérifiée par la fonction $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-xt^2)}{1+t^2} dt$ sur $[0,+\infty[$.

2. INTÉGRATION SUR UN ESPACE PRODUIT : Tribu des ensembles mesurables sur un produit d'espace mesurés. Une fonction mesurable relativement à cette tribu a des applications partielles mesurables.

Lundi 6 décembre 2010

1. CONSTRUCTION DE LA MESURE PRODUIT : Mesurabilité de l'application $x \to \int_Y f(x,y) d\nu(y)$ lorsque f est mesurable. Construction de la mesure produit. La mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$ est le produit de n copies de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

2. INTÉGRATION PAR RAPPORT À LA MESURE PRODUIT : Le produit tensoriel de deux fonctions intégrables est intégrable. Théorème de Fubini pour les fonctions mesurables positives. Ensembles négligeables pour la mesure produit. Énoncé du théorème de Fubini.

Lundi 13 décembre 2010

1. FIN L'INTÉGRATION SUR UN ESPACE PRODUIT : Extension du théorème de Fubini aux fonctions positives $\mu \otimes \nu$-mesurables (relativement à la tribu complétée de la tribu produit par rapport à $\mu \otimes \nu$). Ensembles $\mu \otimes \nu$-négligeables. Théorèmes de Fubini et de Tonnelli relatifs aux fonctions $\mu \otimes \nu$-intégrables.

2. THÉORÈME DU CHANGEMENT DE VARIABLE. Énoncé du théorème. Exemple d'utilisation : passage en coordonnées polaires dans le plan. Démonstration du théorème du changement de variable : effet d'un changement de variable linéaire sur la mesure d'un Borélien, majoration $\int_B dy \leq \int_{\Phi^{-1}(B)} |J_\Phi(x)| dx$ pour tout Borélien B, où $y = \Phi(x)$ est le changement de variable, et renvoi aux notes de cours pour la fin de la démonstration).

FIN DU COURS DE CALCUL INTEGRAL