PROGRAMME TRAITE EN COURS DE CALCUL INTEGRAL
Automne 2010

Lundi 13 septembre 2010

1. INTRODUCTION À L'INTÉGRALE DE LEBESGUE : Intégrale de Riemann, insuffisance de l'intégrale de Riemann (une fonction Riemann intégrable est bornée, une limite simple de fonctions Riemann intégrables n'est pas nécessairement Riemann intégrable). Présentation de la méthode utilisée par Lebesgue pour intégrer les fonctions bornées sur un segment compact. Cas de la fonction de Dirichlet.

2. RAPPELS SUR LA THÉORIE DES ENSEMBLES : Vocabulaire de la théorie des ensembles. Dénombrabilité (une partie d'un ensemble dénombrable est dénombrable, un produit de deux ensembles dénombrables est dénombrable, une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable).

3. TRIBU SUR UN ENSEMBLE : Définition d'une tribu. Premiers exemples (tribu des parties d'un ensemble, tribu des parties dénombrables ou co-dénombrables d'un ensemble).

Lundi 20 septembre 2010

1. FIN DES TRIBUS : Tribu engendrée par une classe de parties. Tribu Borélienne. La tribu Borélienne de $\mathbb{R}$ est engendrée par les intervalles ouverts. La tribu Borélienne de $\mathbb{R}^p$ est engendrée par les pavés bornés.

2. DÉBUT DES ESPACES MESURÉS : Définition d'une mesure positive. Exemples (mesure de comptage, masse de Dirac, mesures discrètes sur un ensemble). Espaces mesurés (finis, σ-finis, de probabilité). Propriétés élémentaires des mesures (croissance de la mesure, mesure de la réunion d'une suite croissante de parties mesurables, de l'intersection d'une suite décroissante, sous-additivité dénombrable). Ensemble de mesure nulle.

Lundi 27 septembre 2010

1. COMPLÉTÉ D'UN ESPACE MESURÉ : Les sous-ensembles qui sont réunion d'un ensemble de mesure nulle et d'un ensemble mesurable forment une tribu. Ensembles μ – mesurables. Mesure des ensembles μ – mesurables.

2. CONSTRUCTION DE LA MESURE DE LEBESGUE DE $\mathbb{R}^p$: Mesure d'un pavé de $\mathbb{R}^p$. Définition d'une algèbre de parties sur un ensemble. Les réunions finies de pavés de $\mathbb{R}^p$ forment une algèbre. Définition d'une mesure positive sur une algèbre. Mesure de Lebesgue d'une réunion finie de pavés (pour une telle réunion, on peut supposer que les pavés sont deux à deux disjoints ; la somme des mesures de ces pavés disjoints est bien définie et elle est finiment additive). Démonstration complète, dans le cas $p = 1$, du fait que la mesure de Lebesgue sur l'algèbre des réunions finies de pavés possède la propriété de σ-additivité. Démonstration de Borel-Lebesgue. Énoncé du théorème d'extension de Hahn (existence, sous une hypothèse de σ-finitude, d'un prolongement unique d'une mesure positive sur une algèbre de parties à la tribu engendrée par cette algèbre). Application de ce théorème à la définition de la mesure de Borel sur $\mathbb{R}^p$. Définition de la mesure supérieure. Énoncé du théorème de prolongement de Lebesgue (la mesure supérieure, restreinte aux parties qui « partitionnent additivement » $\mathbb{R}^p$ du point de vue de la mesure supérieure, fournit l'extension de la mesure de Borel aux parties Lebesgue-mesurables).

Prévu pour la prochaine fois

1. COMPLÉMENTS SUR LE THÉORÈME DE HAHN.
2. DÉBUT D'UN NOUVEAU CHAPITRE, TRÈS COURT, SUR LES FONCTIONS MESURABLES.