

## 4. INTÉGRATION SUR LES ESPACES PRODUITS

4.1- MESURE PRODUIT .....	86
4.2- THÉORÈME DE FUBINI .....	101
4.3 - THÉORÈME DU CHANGEMENT DE VARIABLE...	107

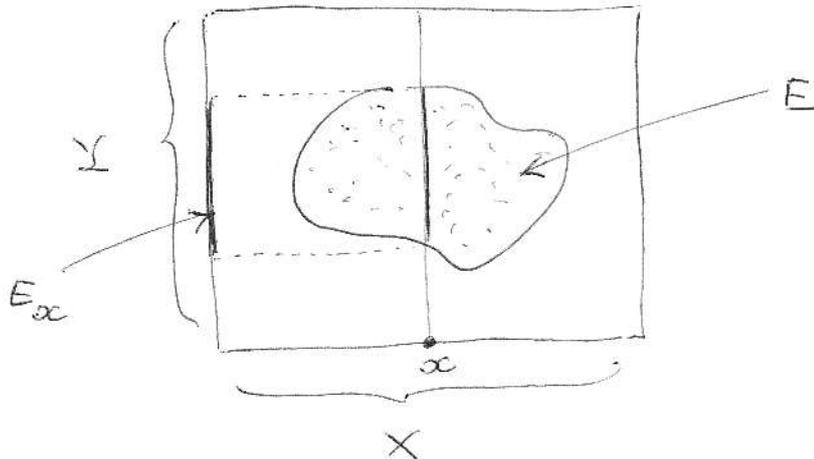
## 4. INTÉGRATION SUR LES ESPACES PRODUITS

### 4.1. MESURE PRODUIT

4.1.1. Soient  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  et  $(Y, \mathcal{N}, \nu)$  deux espaces mesurés  $\sigma$ -finis. Un sous-ensemble de  $X \times Y$  de la forme  $A \times B$  avec  $A \in \mathcal{M}$  et  $B \in \mathcal{N}$  sera appelé un rectangle mesurable. On désignera par  $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$  la tribu sur  $X \times Y$  engendrée par les rectangles mesurables.

4.1.2. Pour toute partie  $E$  de  $X \times Y$  et tout  $x \in X$ , on pose :

$$E_x = \{y \in Y \mid (x, y) \in E\}.$$



On dit que  $E_x$  est la coupe de  $E$  selon  $x \in X$ . Pour tout  $y \in Y$ , on définit la coupe de  $E$  selon  $y$  par :

$$E_y = \{x \in X \mid (x, y) \in E\}.$$

Par exemple, si  $E = A \times B$  où  $A \subset X$  et  $B \subset Y$ , on a pour tout  $x \in X$  :

$$E_x = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x \notin A \\ B & \text{si } x \in A. \end{cases}$$

4.1.3. Soit  $f : X \times Y \rightarrow Z$  une application du produit  $X \times Y$  dans un ensemble  $Z$ . Pour  $x \in X$ , on définit l'application partielle  $f_x : Y \rightarrow Z$  par :

$$f_x(y) = f(x, y).$$

De manière analogue, on définit pour tout  $y \in Y$  une application partielle  $f_y : X \rightarrow Z$  par :

$$f_y(x) = f(x, y).$$

Une propriété importante de la tribu  $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$  est d'assurer la mesurabilité des coupes et des applications partielles.

Plus précisément, on a :

4.1.4- Proposition. Soient  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  et  $(Y, \mathcal{N}, \nu)$  deux espaces mesurés  $\sigma$ -finis. Alors, on a :

- (i) Soit  $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ . Pour tout  $x \in X$ , on a :  $E_x \in \mathcal{N}$ ;  
 (ii) Soit  $f : X \times Y \rightarrow Z$  une application mesurable de  $X \times Y$  muni de la tribu  $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$  dans un espace topologique  $Z$ . Pour tout  $x \in X$ , l'application partielle  $f_x : Y \rightarrow Z$  est mesurable quand on munit  $Y$  de la tribu  $\mathcal{N}$ .

Démonstration.

- (i) Posons  $\mathcal{C} = \{ E \subset X \times Y \mid E_x \in \mathcal{N} \text{ pour tout } x \in X \}$ .

Comme  $(X \times Y)_x = Y \in \mathcal{N}$  pour tout  $x \in X$ , on a :

$X \times Y \in \mathcal{C}$ . Si  $E \in \mathcal{C}$  on a pour tout  $x \in X$  :

$$\left( \bigcap_{x \in X} E \right)_x = \bigcap_y E_x \in \mathcal{N},$$

et par conséquent  $\bigcap E \in \mathcal{C}$ . Enfin, si  $E_1, E_2, \dots$  est une suite d'éléments  $X \times Y$  de  $\mathcal{C}$ , on a pour tout  $x \in X$  :

$$\left( \bigcup_{n \geq 1} E_n \right)_x = \bigcup_{n \geq 1} (E_n)_x \in \mathcal{N},$$

et par conséquent  $\bigcup_{n \geq 1} E_n \in \mathcal{C}$ . On a ainsi montré que  $\mathcal{C}$  est une tribu sur  $X \times Y$ . En outre, si  $A \in \mathcal{M}$  et  $B \in \mathcal{N}$ , on a pour tout  $x \in X$  :

$$(A \times B)_x = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x \notin A \\ B & \text{si } x \in A, \end{cases}$$

de sorte que  $A \times B \in \mathcal{C}$ . Comme  $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$  est la plus petite tribu sur  $X \times Y$  contenant les rectangles mesurables, on en déduit que  $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \subset \mathcal{C}$ , ce qui démontre (i).

(ii) Soit  $B$  un Borélien de  $Z$ . Comme  $f: (X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}) \rightarrow Z$  est mesurable, on a  $f^{-1}(B) \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ . Pour tout  $x \in X$ , on a en vertu de (i):

$$f_x^{-1}(B) = (f^{-1}(B))_x \in \mathcal{N},$$

et par conséquent  $f_x: (Y, \mathcal{N}) \rightarrow Z$  est mesurable. ■

L'objet de la section 4.1 est de démontrer le résultat suivant:

**9** 4.1.5 - Théorème - Soient  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  et  $(Y, \mathcal{N}, \nu)$  deux espaces mesurés  $\sigma$ -finis.

(i) Il existe une unique mesure positive  $\mu \otimes \nu$  sur  $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$  qui vérifie:

$$(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A) \nu(B)$$

quels que soient  $A \in \mathcal{M}$  et  $B \in \mathcal{N}$ ;

(ii) Pour toute fonction  $f: X \times Y \rightarrow [0, +\infty]$   $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ -mesurable, on a:

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int \left( \int f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int \left( \int f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

où les intégrales  $X$  superposées sont des intégrales de fonctions mesurables  $\geq 0$ .

On dit que  $\mu \otimes \nu$  est le produit des mesures  $\mu$  et  $\nu$ .

La démonstration du théorème 4.1.5 repose en partie sur la notion de classe monotone, que nous développons ci-dessous.

## 4.1.6. Classes monotones

4.1.6.1 - Définition. On appelle classe monotone sur un ensemble  $X$  une famille  $\mathcal{A}$  de parties de  $X$  qui vérifie les deux conditions suivantes:

(i) Pour toute suite croissante  $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \dots$  d'éléments de  $\mathcal{A}$ , la réunion

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A};$$

(ii) Pour toute suite décroissante  $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \dots$  d'éléments de  $\mathcal{A}$ , on a:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}.$$

Ainsi, toute tribu sur  $X$  est une classe monotone.

Rappelons qu'une algèbre de parties d'un ensemble  $X$  est une famille  $\mathcal{P}_0$  de parties de  $X$  vérifiant les deux conditions suivantes :

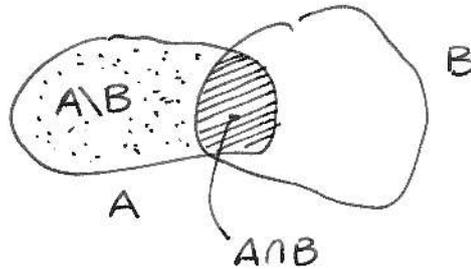
$$(i) A, B \in \mathcal{P}_0 \implies A \cup B \in \mathcal{P}_0;$$

$$(ii) A, B \in \mathcal{P}_0 \implies A \setminus B \in \mathcal{P}_0.$$

Dans ce cas, on a alors :

$$(iii) A, B \in \mathcal{P}_0 \implies A \cap B \in \mathcal{P}_0$$

car  $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$ .



Pour démontrer le théorème 4.1.5, nous aurons besoin du lemme suivant :

4.1.6.2 - Lemme. Soient  $X$  un ensemble,  $\mathcal{A}$  une classe monotone sur  $X$  et  $\mathcal{P}_0$  une algèbre de parties de  $X$ . On suppose que  $X \in \mathcal{P}_0$  et que  $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{A}$ . Alors, on a :

$$\mathcal{P}_0^\sigma \subset \mathcal{A},$$

où  $\mathcal{P}_0^\sigma$  désigne la tribu engendrée par  $\mathcal{P}_0$ .

Démonstration. Notons  $\mathcal{P}_0^m$  la plus petite classe monotone contenant  $\mathcal{P}_0$ , c'est à dire l'intersection de toutes les classes monotones sur  $X$  contenant  $\mathcal{P}_0$ . Comme  $\mathcal{A}$  est une classe monotone contenant  $\mathcal{P}_0$ , on a :

$$\mathcal{P}_0^m \subset \mathcal{A}$$

1<sup>ère</sup> étape. Pour prouver le lemme, il suffit de montrer que  $\mathcal{P}_0^m$  est une algèbre. Tout d'abord, puisque  $\mathcal{P}_0^m \supset \mathcal{P}_0$ , on a  $X \in \mathcal{P}_0^m$ . Soient  $A_1, A_2, \dots$  des éléments de  $\mathcal{P}_0^m$ . Si  $\mathcal{P}_0^m$  est une algèbre, on a :

$$B_n = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{P}_0^m$$

et, comme  $\mathcal{P}_0^m$  est une classe monotone, on a :

$$\bigcup_{n \geq 1} A_n = B_1 \cup B_2 \cup \dots \in \mathcal{P}_0^m. \text{ Enfin, pour}$$

tout  $A \in \mathcal{P}_0^m$ , on a :  $X \setminus A \in \mathcal{P}_0^m$  si  $\mathcal{P}_0^m$  est une algèbre.

Il s'ensuit que, si  $\mathcal{P}^m$  est une algèbre, c'est une tribu.  
Mais alors, comme  $\mathcal{P}^m \supset \mathcal{P}_0$ , on a :

$$\mathcal{P}^\sigma \subset \mathcal{P}^m \subset \mathcal{A},$$

et le lemme est démontré.

2<sup>ème</sup> étape. Montrons que  $\mathcal{P}^m$  est une algèbre. A cet effet, posons pour tout  $A \in \mathcal{P}_0$  :

$$[A] = \{ B \in \mathcal{P}^m \mid A \cup B \in \mathcal{P}^m, A \cap B \in \mathcal{P}^m, B \setminus A \in \mathcal{P}^m \}$$

On définit ainsi une classe  $[A]$  de parties de  $X$  qui est monotone. En effet, si  $B_1 \subset B_2 \subset \dots$  est une suite croissante d'éléments  $B_n \in \mathcal{P}^m$ , on a :

$$A \cup \left( \bigcup_{n \geq 1} B_n \right) = \bigcup_{n \geq 1} (A \cup B_n) \quad \text{avec } A \cup B_n \in \mathcal{P}^m$$

et  $A \cup B_n \subset A \cup B_{n+1}$ . Comme  $\mathcal{P}^m$  est une classe monotone, on a :

$$A \cup \left( \bigcup_{n \geq 1} B_n \right) \in \mathcal{P}^m$$

et, de même,  $A \cap \left( \bigcup_{n \geq 1} B_n \right) = \bigcap_{n \geq 1} (A \cap B_n) \in \mathcal{P}^m$ ,

$$\left( \bigcup_{n \geq 1} B_n \right) \setminus A = \bigcup_{n \geq 1} (B_n \setminus A) \in \mathcal{P}^m,$$

ce qui prouve que  $\bigcup_{n \geq 1} B_n \in \mathcal{P}^m$ . De même, si  $B_1 \supset B_2 \supset \dots$  est une suite décroissante d'éléments  $B_n \in \mathcal{P}^m$ , on a :

$$\bigcap_{n \geq 1} B_n \in \mathcal{P}^m,$$

de sorte que  $[A]$  est une classe monotone. Si  $A \in \mathcal{P}_0$ , alors on a :

$$\mathcal{P}_0 \subset [A],$$

car  $\mathcal{P}_0$  est une algèbre par hypothèse. Il s'ensuit que l'on a :

$$\mathcal{P}^m \subset [A],$$

car  $[A]$  est une classe monotone contenant  $\mathcal{P}_0$ . On a donc établi que, pour tout  $A \in \mathcal{P}_0$ , on a :

$$B \in \mathcal{P}^m \implies A \cup B \in \mathcal{P}^m, A \cap B \in \mathcal{P}^m \text{ et } B \setminus A \in \mathcal{P}^m.$$

Pour  $B \in \mathcal{P}^m$ , on a donc

$\mathcal{P}_0 \subset [B]$  d'où, puisque  $[B]$  est une classe monotone :

$$\mathcal{P}^m \subset [B].$$

Mais alors, quel que soit  $A \in \mathcal{P}_0$  et  $B \in \mathcal{P}^m$ , on a :

$A \cup B \in \mathcal{B}^m$ ,  $A \setminus B \in \mathcal{B}^m$  et  $B \setminus A \in \mathcal{B}^m$ .  
Ceci prouve que  $\mathcal{B}^m$  est une algèbre, et achève la démonstration  
du lemme 4.1.6.2. ■

#### 4.1.7. L'algèbre $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$

On désigne par  $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$  la famille des parties de  $X \times Y$   
qui sont réunions finies de rectangles mesurables. On a :

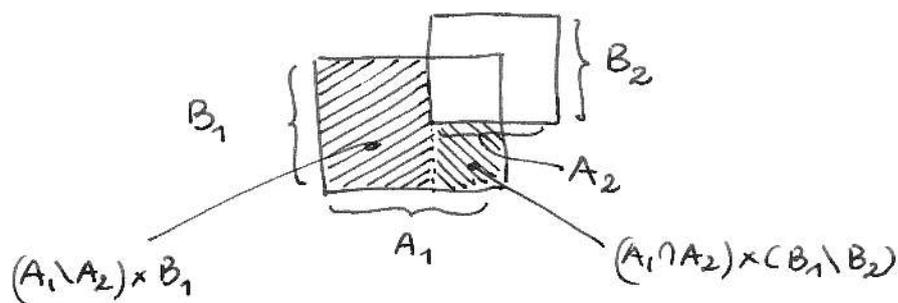
Lemme.  $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$  est une algèbre de parties de  $X \times Y$  qui  
contient  $X \times Y$ . En outre, tout élément de  $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$  est une  
réunion finie de rectangles mesurables deux à deux  
disjoints.

Démonstration.  $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$  est clairement stable par réunions  
finies et contient  $X \times Y$ , qui est un rectangle mesurable.  
Pour montrer que  $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$  est stable par intersections finies,  
il suffit de démontrer que l'intersection de deux  
rectangles mesurables est encore un rectangle mesurable.  
On ceci résulte immédiatement de la formule

$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2).$$

Pour démontrer que, si  $E, F \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$ , alors  $E \setminus F \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$ ,  
on peut se limiter en vertu de ce qui précède au cas  
où  $E$  et  $F$  sont des rectangles mesurables. Mais ceci  
résulte immédiatement de la formule :

$$(A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2) = [(A_1 \setminus A_2) \times B_1] \cup [(A_1 \cap A_2) \times (B_1 \setminus B_2)]$$



Il résulte également de ce qui précède que la réunion de  
deux rectangles mesurables est réunion de cinq rectangles  
mesurables deux à deux disjoints. Par récurrence sur  $n$ ,  
on en déduit immédiatement qu'une réunion de  $n$   
rectangles mesurables s'écrit comme une réunion finie  
de rectangles mesurables deux à deux disjoints. ■

Comme  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  et  $(Y, \mathcal{N}, \nu)$  sont des espaces mesurés  $\sigma$ -finis, il existe une suite  $(A_n)_{n \geq 1}$  d'éléments de  $\mathcal{M}$  vérifiant  $\mu(A_n) < +\infty$  et une suite  $(B_m)_{m \geq 1}$  d'éléments de  $\mathcal{N}$  vérifiant  $\nu(B_m) < +\infty$ , telles que :

$$X = \bigcup_{n \geq 1} A_n, \quad Y = \bigcup_{m \geq 1} B_m.$$

On a donc :

$$X \times Y = \bigcup_{n, m \geq 1} A_n \times B_m \quad \text{avec } \mu(A_n) < +\infty \text{ et } \nu(B_m) < +\infty.$$

**4.1.8. Théorème.** Soient  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  et  $(Y, \mathcal{N}, \nu)$  deux espaces mesurés  $\sigma$ -finis. Soit  $f: (X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}) \rightarrow [0, +\infty]$  une fonction mesurable. Alors, pour tout  $x \in X$ , l'application

$f_x: y \in Y \mapsto f_x(y) = f(x, y) \in [0, +\infty]$   
est  $\mathcal{N}$ -mesurable, et l'application

$$x \in X \mapsto \int_Y f_x d\nu = \int_Y f(x, y) d\nu(y)$$

est  $\mathcal{M}$ -mesurable. De même, pour tout  $y \in Y$ , l'application

$f_y: x \in X \mapsto f_y(x) = f(x, y) \in [0, +\infty]$   
est  $\mathcal{M}$ -mesurable, et l'application

$$y \in Y \mapsto \int_X f_y d\mu = \int_X f(x, y) d\mu(x)$$

est  $\mathcal{N}$ -mesurable.

Démonstration. D'après la proposition 4.1.4, pour tout  $x \in X$  et tout  $y \in Y$ , les applications  $f_x$  et  $f_y$  sont respectivement  $\mathcal{N}$ -mesurable et  $\mathcal{M}$ -mesurable. Nous allons montrer que l'application  $x \in X \mapsto \int_Y f_x d\nu$  est  $\mathcal{M}$ -mesurable, la démonstration de la  $\mathcal{N}$ -mesurabilité de l'application  $y \in Y \mapsto \int_X f_y d\mu$  étant identique, à l'échange près des espaces mesurés  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  et  $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ .

1<sup>ère</sup> étape - On peut supposer que  $\mu(X) < +\infty$  et  $\nu(Y) < +\infty$ .

Soit en effet  $(A_n)_{n \geq 1}$  (resp.  $(B_m)_{m \geq 1}$ ) une suite