2.2.1.1. On montre de même que, si h est μ-mesurable, alors g est μ-mesurable, ce qui prouve l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii)

(ii) $\Rightarrow$ (i). Supposons que f et g soient μ-mesurables et montrons que h est μ-mesurable. Comme la tribu des Boréliens de $\mathbb{R}^2$ est engendrée par les rectangles de la forme

$$[a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \qquad (a_1 < a_2,\ b_1 < b_2),$$

il suffit de montrer que l'ensemble

$$E = \{x \in X \mid h(x) \in [a_1, a_2] \times [b_1, b_2]\}$$

est μ-mesurable quels que soient les réels a_1, a_2, b_1, b_2 vérifiant $a_1 < a_2$ et $b_1 < b_2$. Or on a :

$$\begin{aligned} E &= \{x \in X \mid f(x) \in [a_1, a_2] \text{ et } g(x) \in [b_1, b_2]\} \\ &= f^{-1}([a_1, a_2]) \cap g^{-1}([b_1, b_2]) \end{aligned}$$

et, puisque f et g sont μ-mesurables, E est μ-mesurable comme intersection de deux sous-ensembles μ-mesurables de X. La proposition est donc démontrée. ■

<u>2.2.2.2. Proposition</u> - <u>Soient (X, μ) un espace mesuré et $f, g : X \to \mathbb{R}$ deux fonctions μ-mesurables. Alors, les applications $f+g$ et fg sont μ-mesurables.</u>

<u>Démonstration</u>. L'application $f+g$ (resp. fg) est composée de l'application $x \mapsto (f(x), g(x))$, qui est μ-mesurable en vertu de la proposition 2.2.2.1, et de l'application continue $(x,y) \mapsto x+y$ (resp. $(x,y) \mapsto xy$). Il résulte alors des propositions 2.1.3.2 et 2.2.1.1 que $f+g$ (resp. fg) est μ-mesurable. ■

Cette proposition s'étend immédiatement au cas où f, g sont des fonctions numériques positives, à condition de convenir que $0 \times (+\infty) = 0$.

2.2.2.3 - Fonctions simples. Soit (X, μ) un espace mesuré. On dit qu'une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est étagée si son image est un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}$. Une fonction étagée μ-mesurable est dite simple. Toute fonction étagée $f : X \to \mathbb{R}$ se décompose canoniquement en une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques. Soient en effet $a_1, a_2, \dots, a_n$ les valeurs distinctes prises par la fonction f, et posons :

$$A_i = \{x \in X \mid f(x) = a_i\} \qquad (1 \leq i \leq n).$$

On vérifie immédiatement que l'on a :

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}.$$

Si f est μ-mesurable, chaque $A_i = f^{-1}(\{a_i\})$ est μ-mesurable. Inversement, si chaque A_i est μ-mesurable, f est μ-mesurable en vertu de 2.1.3.4 et de 2.2.2.2. Ainsi, f est simple si et seulement si chaque A_i est μ-mesurable. Une fonction simple est donc une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques de sous-ensembles μ-mesurables. On notera que, si f est positive, les coefficients a_i sont positifs.

2.2.3 - Limites simples de fonctions mesurables

2.2.3.1 - Limite simple et limite presque partout. Soient (X, μ) un espace mesuré et $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une suite de fonctions numériques $(n = 1, 2, \dots)$. On dit que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers la fonction $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ si, pour tout $x \in X$, $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$.

On dit que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement μ-presque partout vers la fonction $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$

s'il existe un sous-ensemble μ-négligeable $N \subset X$ tel que l'on ait, pour tout $x \notin N$, $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$. Dans ce cas, $f(x)$ n'est déterminé par la suite des $f_n(x)$ que pour $x \notin N$. En d'autres termes, f n'est déterminée par les f_n qu'à un ensemble μ-négligeable près. Ceci n'est nullement gênant pour l'étude de la μ-mesurabilité de f, puisqu'une fonction égale μ-presque partout à une fonction μ-mesurable est μ-mesurable en vertu de la proposition 2.1.1.3.

Pour examiner la μ-mesurabilité d'une limite simple μ-presque partout d'une suite de fonctions mesurables, on utilisera le résultat suivant :

2.2.3.2 - Proposition. Soit (X, μ) un espace mesuré. Pour toute suite $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ de fonctions numériques μ-mesurables, les fonctions numériques $\sup_n f_n$ et $\inf_n f_n$ sont μ-mesurables.

Démonstration. Posons $f = \sup_n f_n$ et $g = \inf_n f_n$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a :

$$\{x \in X \mid f(x) \leq a\} = \bigcap_n \{x \in X \mid f_n(x) \leq a\}$$
$$\{x \in X \mid g(x) < a\} = \bigcup_n \{x \in X \mid f_n(x) < a\}$$

et la μ-mesurabilité de f et g résulte immédiatement de 2.1.2.2. ■

2.2.3.3 - Corollaire. Soient (X, μ) un espace mesuré et $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $(n = 1, 2, \dots)$ une suite de fonctions μ-mesurables. Alors, la fonction numérique $\sum_{n \geq 1} |f_n|$ est μ-mesurable.

Démonstration. On a :

$$\sum_{n \geq 1} |f_n| = \sup_{N \geq 1} \left(\sum_{1 \leq n \leq N} |f_n| \right),$$

et la conclusion résulte de 2.2.1.3, 2.2.2.2 et 2.2.3.2. ■

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de cette section :

2.2.3.4 - Théorème - Soient (X,μ) un espace mesuré et $f_n : X \to \mathbb{R}$ $(n=1,2,\dots)$ une suite de fonctions numériques μ-mesurables. On suppose que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement μ-presque partout vers une fonction $f : X \to \mathbb{R}$. Alors, f est μ-mesurable.

Démonstration. Soit $N \subset X$ un sous-ensemble μ-négligeable de X tel que $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ pour tout $x \notin N$. Quitte à remplacer les f_n et f par les fonctions $\tilde{f}_n$ et $\tilde{f}$ définies par :

$$\tilde{f}_n(x) = \begin{cases} f_n(x) & \text{si } x \notin N \\ 0 & \text{si } x \in N \end{cases}, \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \notin N \\ 0 & \text{si } x \in N, \end{cases}$$

on peut - en utilisant 2.1.1.3 - supposer que $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in X$. Mais alors, on a :

$$f(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x) = \operatorname{Inf}_n \operatorname{Sup}(f_n(x), f_{n+1}(x), \dots),$$

et la conclusion résulte immédiatement de 2.2.3.2. ■

2.2.3.5. Corollaire - Soient (X,μ) un espace mesuré et $f_n : X \to \mathbb{R}$ $(n=1,2,\dots)$ une suite de fonctions μ-mesurables. On suppose que la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge pour μ-presque tout $x \in X$. Alors, toute fonction $f : X \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x)$ pour μ-presque tout $x \in X$ est μ-mesurable.

Démonstration. Celà résulte immédiatement de 2.2.3.4. ■

Terminons cette section par un résultat qui relie la convergence simple μ-presque partout à la convergence uniforme sur des parties de mesure arbitrairement proche de la mesure de X, lorsque (X,μ) est un espace mesuré fini.

2.2.3.6 - Théorème (Egorov). Soient (X,μ) un espace mesuré et $f_n : X \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions numériques μ-mesurables. On suppose que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement μ-presque partout vers une fonction $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Alors, pour toute partie μ-mesurable $A \subset X$ telle que $\mu(A) < +\infty$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie μ-mesurable $A_\varepsilon \subset A$ telle que l'on ait :

(i) $\mu(A \setminus A_\varepsilon) \leqq \varepsilon$;

(ii) La suite $(f_n)_{n \geqq 1}$ converge uniformément vers f sur A.

Démonstration. Quitte à remplacer X par A, on peut supposer que $\mu(X) < +\infty$. Soit d la distance définissant la topologie de $\mathbb{R}$. Comme les f_n et f sont μ-mesurables et que l'application $(x,y) \mapsto d(x,y)$ est continue, l'application $x \mapsto d(f_n(x), f(x))$ est μ-mesurable. Il s'ensuit que, pour tout entier $q \geqq 1$, l'ensemble

$$E_{n,q} = \{x \in X \mid d(f_n(x), f(x)) > \tfrac{1}{q}\}$$

est μ-mesurable. Montrons que, pour tout entier $q \geqq 1$,

$$\mu\Big(\bigcap_{N \geqq 1} \bigcup_{n \geqq N} E_{n,q}\Big) = 0$$

Par hypothèse, il existe un sous-ensemble μ-négligeable $E \subset X$ tel que l'on ait, pour tout $x \notin E$, $d(f_n(x), f(x)) \to 0$ quand $n \to +\infty$. On a donc :

$$x \notin E \implies \forall q \geqq 1,\ \exists N \geqq 1 \text{ tel que } d(f_n(x), f(x)) \leqq \tfrac{1}{q} \text{ pour tout } n \geqq N.$$

Par contraposition, on a pour tout $x \in X$:

$$\Big(\exists q \geqq 1 \quad \forall N \geqq 1 \quad \exists n \geqq N \text{ tel que } d(f_n(x), f(x)) > \tfrac{1}{q}\Big) \implies x \in E,$$

soit

$$\bigcup_{q \geqq 1} \Big(\bigcap_{N \geqq 1} \bigcup_{n \geqq N} E_{n,q}\Big) \subset E,$$

et donc $\displaystyle\bigcap_{N \geqq 1} \bigcup_{n \geqq N} E_{n,q} \subset E$ pour tout entier $q \geqq 1$.

Comme $\mu(E) = 0$, on en déduit que

$$\mu\Big(\bigcap_{N \geqq 1} \bigcup_{n \geqq N} E_{n,q}\Big) = 0.$$

Mais les ensembles $F_{N,q} = \displaystyle\bigcup_{n \geqq N} E_{n,q}$ forment une suite décroissante et, comme $\mu(X) < +\infty$, on en déduit que $\mu(F_{N,q}) \to 0$ quand $N \to +\infty$.

Pour tout $\varepsilon > 0$ donné, on peut donc choisir, pour tout $q \geq 1$, un entier $N(q) \geq 1$ tel que l'on ait :

$$\mu(F_{N(q),q}) < \frac{\varepsilon}{2^q}.$$

Posons $X_\varepsilon = \left(\bigcup_{q \geq 1} F_{N(q),q}\right)^c = \bigcap_{q \geq 1} F^c_{N(q),q} = \bigcap_{q \geq 1} \bigcap_{n \geq N(q)} E^c_{n,q}$.

On a :

$$\mu(X \setminus X_\varepsilon) = \mu\left(\bigcup_{q \geq 1} F_{N(q),q}\right) \leq \sum_{q \geq 1} \frac{\varepsilon}{2^q} = \varepsilon,$$ d'où la condition (i). Pour terminer la démonstration, montrons que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge vers f uniformément sur X_ε. Or, si $x \in X_\varepsilon$, on a pour tout $q \geq 1$:

$$d(f_n(x), f(x)) \leq \frac{1}{q} \quad \text{quel que soit } n \geq N(q),$$

ce qui prouve bien que

$$\sup_{x \in X_\varepsilon} d(f_n(x), f(x)) \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \to +\infty.$$

■

2.3. APPROXIMATION DES FONCTIONS MESURABLES PAR DES FONCTIONS SIMPLES.

2.3.1 - Soient (X, μ) un espace mesuré et $(f_1, f_2, \dots)$ une suite de fonctions simples $f_n : X \to \mathbb{R}$. Si la suite $(f_1, f_2, \dots)$ converge simplement vers $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, alors f est μ-mesurable en vertu de 2.2.2.3 et de 2.2.3.4. Inversement, on a :

2.3.2 - Proposition - Soient (X, μ) un espace mesuré et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction μ-mesurable. On a :

(i) Il existe une suite $(f_1, f_2, \dots)$ de fonctions simples qui converge simplement vers f ;

(ii) Si f est en outre positive, il existe une suite $(f_1, f_2, \dots)$ de fonctions simples vérifiant

$$0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f$$

et qui converge simplement vers f ;

(iii) Si f est en outre bornée, il existe une suite $(f_1, f_2, \dots)$ de fonctions simples qui converge vers f

uniformément sur X.

Démonstration. (i) Pour tout entier $n \geqq 1$, posons :

$$E_{n,-\infty} = \{x \in X \mid f(x) < -n\}$$
$$E_{n,i} = \{x \in X \mid \frac{i}{n} \leqq f(x) < \frac{i+1}{n}\} \text{ pour } i = -n^2, -n^2+1, \dots, n^2-1$$
$$E_{n,+\infty} = \{x \in X \mid n \leqq f(x)\}.$$

On définit ainsi des sous-ensembles μ-mesurables de X qui sont deux à deux disjoints et dont la réunion est égale à X. Posons :

$$f_n = -n \mathbb{1}_{E_{n,-\infty}} + \sum_{i=-n^2}^{n^2-1} \frac{i}{n} \mathbb{1}_{E_{n,i}} + n \mathbb{1}_{E_{n,+\infty}}.$$

On définit ainsi une fonction simple sur X. Pour $x \in X$ tel que $f(x) \in \mathbb{R}$, il existe $N \geqq 1$ tel que $-N \leqq f(x) < N$, et on a, pour $n \geqq N$:

$$|f(x) - f_n(x)| \leqq \frac{1}{n},$$

d'où l'on déduit que $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ quand $n \to +\infty$.
Si $f(x) = +\infty$, on a $f_n(x) = n$ pour tout $n \geqq 1$, et donc $f_n(x) \to +\infty = f(x)$ quand $n \to +\infty$.
Si $f(x) = -\infty$, on a $f_n(x) = -n$ pour tout $n \geqq 1$, et donc $f_n(x) \to -\infty = f(x)$ quand $n \to +\infty$. On a donc $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ pour tout $x \in X$, d'où (i).

(ii) Supposons que $f(x) \geqq 0$ pour tout $x \in X$.
Pour tout entier i tel que $1 \leqq i \leqq n2^n$, posons

$$E_{n,i} = \{x \in X \mid \frac{i-1}{2^n} \leqq f(x) < \frac{i}{2^n}\} \text{ et}$$
$$E_{n,\infty} = \{x \in X \mid n \leqq f(x)\}.$$

Alors, la fonction

$$f_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \mathbb{1}_{E_{n,i}} + n \mathbb{1}_{E_{n,\infty}}$$

est simple. En outre, on a $f_n \leqq f_{n+1}$ pour tout $n \geqq 1$, et $f_n \leqq f$ pour tout $n \geqq 1$. Comme dans (i), on montre que $(f_n)_{n \geqq 1}$ converge simplement vers f, d'où l'assertion (ii).

(iii) Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction μ-mesurable bornée. Alors, $f_+, f_- : X \to \overline{\mathbb{R}}$ sont également bornées et, comme $f = f_+ - f_-$, il suffit de prouver que f_+ et f_- sont limite uniforme de fonctions simples. On est ainsi ramené au cas où f est positive et bornée. Or, dans ce cas, la construction utilisée en (ii) fournit une suite de fonctions simples f_n qui converge uniformément vers f sur X. ∎