Thierry Fack
octobre 2010

2 - FONCTIONS MESURABLES

2 - FONCTIONS MESURABLES

2.1 - DÉFINITIONS - EXEMPLES

2.1.1 - DÉFINITIONS

2.1.1.1 - Fonction mesurable - Soient $(X, \mathcal{M})$ et $(Y, \mathcal{P})$ deux espaces mesurables. On dit que $f : X \to Y$ est mesurable si, pour toute $A \in \mathcal{P}$, l'image réciproque

$$f^{-1}(A) = \{x \in X \mid f(x) \in A\}$$

appartient à $\mathcal{M}$.

Un espace topologique Y sera, sauf mention contraire, muni de la tribu $\mathcal{P} = \mathcal{B}_Y$ des Boréliens de Y. Ainsi, si $(X, \mathcal{M})$ est un espace mesurable et Y un espace topologique, on dit que $f : X \to Y$ est mesurable si, pour tout Borélien A de Y, on a :

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{M}.$$

2.1.1.2 - Fonction μ-mesurable. Soient (X, μ) un espace mesuré et Y un espace topologique. On dit que $f : X \to Y$ est μ-mesurable si, pour tout Borélien A de Y, l'image réciproque $f^{-1}(A)$ est un sous-ensemble μ-mesurable de X.

On dira que deux fonctions $f, g : X \to Y$ sont égales μ-presque partout s'il existe un sous-ensemble μ-négligeable $N \subset X$ tel que $f(x) = g(x)$ quel que soit $x \notin N$. On a :

2.1.1.3 - Proposition - Soient (X, μ) un espace mesuré et Y un espace topologique. Alors, toute application $f : X \to Y$ qui est égale presque partout à une application μ-mesurable $g : X \to Y$ est elle-même μ-mesurable.

Démonstration. Soient $g : X \to Y$ une application μ-mesurable et $f : X \to Y$ qui coïncide avec g hors d'un sous-ensemble μ-négligeable $N \subset X$. Pour tout Borélien A de Y, on a :

$$f^{-1}(A) = [N^c \cap g^{-1}(A)] \cup [N \cap f^{-1}(A)]$$

où $N^c \cap g^{-1}(A)$ est μ-mesurable (car N^c et $g^{-1}(A)$ sont μ-mesurables), et où $N \cap f^{-1}(A)$ est μ-négligeable (car il est contenu dans N, qui est μ-négligeable). Il s'ensuit que $f^{-1}(A)$ est μ-mesurable, ce qui prouve que f est μ-mesurable. ■

2.1.1.4 - Fonctions numériques. Désignons par $\overline{\mathbb{R}}$ la droite numérique achevée obtenue en rajoutant les points $\pm\infty$ à $\mathbb{R}$. On munit $\overline{\mathbb{R}}$ de la relation d'ordre naturelle pour laquelle $-\infty$ est le plus petit élément et $+\infty$ le plus grand élément. On observera que l'addition de deux nombres est définie de manière évidente dans $\overline{\mathbb{R}}$, sauf pour le couple $(-\infty, +\infty)$. De même, le produit de deux nombres de $\overline{\mathbb{R}}$ est défini, sauf pour les couples $(0, +\infty)$ et $(0, -\infty)$.

On munit $\overline{\mathbb{R}}$ de la distance définie par :

$$d(x, y) = |\operatorname{Arctan}(x) - \operatorname{Arctan}(y)|,$$

où $\operatorname{Arctan}(\pm\infty) = \pm \frac{\pi}{2}$. Comme espace topologique, $\overline{\mathbb{R}}$ est homéomorphe à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, muni de sa topologie canonique. Il s'ensuit que la tribu $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ des Boréliens de $\overline{\mathbb{R}}$ est engendrée par les intervalles $[a, +\infty]$ (resp. $]a, +\infty]$, $[-\infty, a]$, $[-\infty, a[$) où a varie dans $\mathbb{R}$.

Dans la suite, nous aurons souvent à considérer des fonctions à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, c'est à dire susceptibles de prendre les valeurs $\pm\infty$.

Définition. On appelle fonction numérique sur un ensemble X une application $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$.

Les fonctions $f : X \to [0, +\infty]$ seront appelées, par extension, fonctions numériques positives. Il y a donc un sens à parler de fonctions numériques mesurables, ou μ-mesurables.

2.1.2 - CARACTÉRISATION DES FONCTIONS MESURABLES

2.1.2.1 - Proposition. Soient $(X, \mathcal{M})$, $(Y, \mathcal{P})$ deux espaces mesurables, et $\mathcal{P}_0$ une classe de parties de Y engendrant $\mathcal{P}$ comme tribu. Alors, pour toute application $f : X \to Y$, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f est mesurable ;

(ii) $\forall A \in \mathcal{P}_0$, $f^{-1}(A) \in \mathcal{M}$.

Démonstration : (i) $\Rightarrow$ (ii) est évident. Montrons que (ii) $\Rightarrow$ (i). A cet effet, posons :

$$\mathcal{Q} = \{ A \in Y \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{M} \}.$$

Des relations $f^{-1}(A^c) = f^{-1}(A)^c$ et $f^{-1}(\bigcup A_n) = \bigcup f^{-1}(A_n)$, vraies quelles que soient les parties " A et " A_n de Y, on déduit immédiatement que $\mathcal{Q}$ est une tribu comme $\mathcal{M}$. Cette tribu contient $\mathcal{P}_0$ par hypothèse, donc elle contient la tribu engendrée par $\mathcal{P}_0$, d'où

$$\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}.$$

Mais alors, pour tout $A \in \mathcal{P}$, $f^{-1}(A) \in \mathcal{M}$, ce qui démontre que f est mesurable. ■

2.1.2.2 - Corollaire. Soient (X, μ) un espace mesuré et $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction numérique. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f est μ-mesurable ;

(ii) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $E_a = \{ x \in X \mid f(x) \leq a \}$ est μ-mesurable ;

(iii) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $E'_a = \{ x \in X \mid f(x) \geq a \}$ est μ-mesurable ;

(iv) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $F_a = \{ x \in X \mid f(x) < a \}$ est μ-mesurable ;

(v) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $F'_a = \{ x \in X \mid f(x) > a \}$ est μ-mesurable.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la proposition 2.1.2.1, compte tenu des remarques sur l'engendrement de la tribu des Boréliens de $\overline{\mathbb{R}}$ faites en 2.1.1.4. ■

2.1.3 - EXEMPLES D'APPLICATIONS MESURABLES

2.1.3.1 - Soient X et Y deux espaces topologiques. On dit qu'une application $f : X \to Y$ est Borélienne si elle est mesurable lorsqu'on munit X (resp. Y) de la tribu des Boréliens $\mathcal{B}_X$ (resp. $\mathcal{B}_Y$).
Si X est un espace topologique muni d'une mesure Borélienne μ, toute application Borélienne $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est μ-mesurable.

2.1.3.2 - Proposition. Soient X et Y deux espaces topologiques. Toute application continue $f : X \to Y$ est Borélienne.

Démonstration. Comme f est continue, on sait que pour tout ouvert U de Y, $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X, donc un Borélien de X. Comme $\mathcal{B}_Y$ est engendrée par les ouverts de Y, l'application f est Borélienne en vertu de la proposition 2.1.2.1. ■

2.1.3.3 - Corollaire. Toute application $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ qui est presque partout égale à une fonction continue est Lebesgue-mesurable.

Démonstration. D'après la proposition 2.1.1.3, il suffit de montrer que toute application continue $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ est Lebesgue-mesurable. Or f est Borélienne en vertu de la proposition 2.1.3.2 et, comme tout Borélien de $\mathbb{R}^n$ est a fortiori Lebesgue-mesurable, f est Lebesgue-mesurable. ■

Ainsi, toute fonction $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ obtenue à partir d'une fonction continue $\tilde{f} : \mathbb{R}^p \to \overline{\mathbb{R}}$ en modifiant arbitrairement ses valeurs sur un ensemble Lebesgue-négligeable (par exemple sur $\mathbb{Q}^p \subset \mathbb{R}^p$) est Lebesgue-mesurable.

2.1.3.4. Fonctions caractéristiques. Soient (X,μ) un espace mesuré et $A \subset X$. La fonction caractéristique de A est par définition la fonction $\mathbb{1}_A : X \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a :

$$E_a = \{x \in X \mid \mathbb{1}_A(x) \leqq a\} = \begin{cases} X & \text{si } a \geqq 1 \\ A^c & \text{si } 0 \leqq a < 1 \\ \emptyset & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

de sorte que l'on a :

$$\mathbb{1}_A \text{ est } \mu\text{-mesurable} \iff A \text{ est } \mu\text{-mesurable.}$$

2.1.3.5- Remarque. Considérons l'espace $\mathbb{R}$, muni de la mesure de Lebesgue λ. On a vu qu'il existe des parties $A \subset \mathbb{R}$ qui ne sont pas Lebesgue-mesurables. D'après 2.1.3.4, il existe donc des fonctions numériques positives $f : \mathbb{R} \to [0,+\infty]$ qui ne sont pas Lebesgue-mesurables. On montre cependant que l'on ne peut pas construire de fonction non mesurable $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ sans faire appel à l'axiome du choix. En d'autres termes, sauf à le faire exprès en utilisant l'axiome du choix, toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ que nous construirons en pratique seront automatiquement Lebesgue mesurables. Le fait d'être Lebesgue-mesurable est donc une restriction très faible que l'on impose aux fonctions $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$.

2.2. THÉORÈMES DE STABILITÉ

2.2.1- Composition des fonctions mesurables.

2.2.1.1- Proposition. Soient $(X,\mathcal{M})$, $(Y,\mathcal{P})$ et $(Z,\mathcal{Q})$ trois espaces mesurables. Si $f: X \to Y$ et $g: Y \to Z$ sont des applications mesurables, alors $g\circ f: X \to Z$ est mesurable.

Démonstration. Pour tout $A \in \mathcal{Q}$, $g^{-1}(A) \in \mathcal{P}$ car g est mesurable, et donc $f^{-1}(g^{-1}(A)) \in \mathcal{M}$ puisque f est également mesurable. Mais alors :

$$(g\circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A)) \in \mathcal{M},$$

ce qui prouve que $g\circ f$ est mesurable. ■

2.2.1.2- Corollaire. Soient (X,μ) un espace mesuré et $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction numérique μ-mesurable. Alors, pour toute fonction continue $\alpha: \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$, la fonction numérique $\alpha\circ f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ est μ-mesurable.

Démonstration. Résulte immédiatement des propositions 2.1.3.2 et 2.2.1.1. ■

Par exemple, si $f: X \to [0,+\infty]$ est une fonction numérique positive μ-mesurable, l'application $\ln f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ est μ-mesurable, puisque l'application $\ln: [0,+\infty] \to \overline{\mathbb{R}}$ définie par :

$$\ln(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si } x=0 \\ \ln(x) & \text{si } 0<x<\infty \\ +\infty & \text{si } x=+\infty \end{cases}$$

est continue.

2.2.1.3- Proposition- Soient (X,μ) un espace mesuré et $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction numérique μ-mesurable. Alors, l'application $|f|: X \to [0,+\infty]$ est μ-mesurable.

Démonstration. Considérons la fonction $\alpha: \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ définie par :

$$\alpha(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x=+\infty \\ |x| & \text{si } -\infty<x<\infty \\ +\infty & \text{si } x=-\infty. \end{cases}$$

Cette fonction est continue et, puisque $|f| = \alpha\circ f$, la conclusion résulte du corollaire 2.2.1.2. ■

On prendra garde au fait que $|f| : X \to [0, +\infty]$ peut être μ-mesurable sans que f le soit. Par exemple, si $A \subset [0,1]$ est un sous-ensemble non Lebesgue mesurable de $\mathbb{R}$, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ -1 & \text{si } x \in [0,1] \setminus A \\ 0 & \text{si } x \notin [0,1] \end{cases}$$

n'est pas Lebesgue-mesurable car $f^{-1}(\{1\}) = A$ n'est pas Lebesgue-mesurable. Pourtant,

$$|f| = \mathbb{1}_{[0,1]}$$

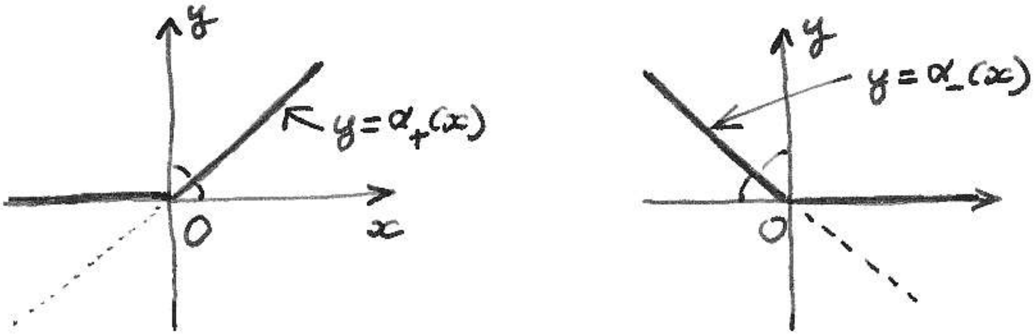
est Lebesgue-mesurable.

2.2.1.4 - Décomposition canonique d'une fonction réelle.

Soient X un ensemble et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur X. Pour étudier f, il est parfois utile de la décomposer en différence de deux fonctions positives. A cet effet, on pose

$$f^+ = \operatorname{Sup}(f, 0)$$
$$f^- = \operatorname{Sup}(-f, 0)$$

Posons $\alpha_+(x) = \operatorname{Sup}(x, 0)$, $\alpha_-(x) = \operatorname{Sup}(-x, 0)$; on définit ainsi deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $[0, +\infty[$, dont les graphes sont figurés ci-dessous :



On a : $f^+ = \alpha_+ \circ f$, $f^- = \alpha_- \circ f$, et on tire de la relation : $\alpha_+(x) - \alpha_-(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, la décomposition

$$f = f^+ - f^-$$

de f en différence des deux fonctions positives f^+ et f^-. On dit que c'est la décomposition canonique de f en différence de deux fonctions positives. De la relation :

$$|x| = \alpha_+(x) + \alpha_-(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R},$$

on déduit que :

$$|f| = f^+ + f^-,$$

d'où $f^+ \leqq |f|$ et $f^- \leqq |f|$.

Si maintenant (X, μ) est un espace mesuré et si $f : X \to \mathbb{R}$ est μ-mesurable, les relations

$$f^\pm = \alpha_\pm \circ f$$

montrent, en utilisant le corollaire 2.2.1.2, que f^+ et f^- sont μ-mesurables.

2.2.2- Mesurabilité de la somme et du produit

Pour étudier la mesurabilité de la somme et du produit de deux fonctions μ-mesurables, on utilisera le résultat suivant, qui a son intérêt propre :

2.2.2.1- Proposition. Soient (X,μ) un espace mesuré et $f, g : X \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) La fonction $h : X \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$h(x) = (f(x), g(x))$$

est μ-mesurable ;

(ii) Les fonctions f et g sont μ-mesurables.

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii). Soit $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $p(x,y) = x$. On a :

$$f = p \circ h$$

et, comme p est continue, f est μ-mesurable si h est μ-mesurable en vertu des propositions 2.1.3.2 et