3. FONCTIONS INTÉGRABLES

3- FONCTIONS INTÉGRABLES

Dans tout ce chapitre, on désigne par (X,μ) un espace mesuré et par $\mathcal{M}_\mu$ la tribu des sous-ensembles μ-mesurables de X. Rappelons qu'un sous-ensemble μ-négligeable est un sous-ensemble $N \in \mathcal{M}_\mu$ de X tel que $\mu(N) = 0$. Une fonction numérique sur X est une application $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$; une telle fonction est dite positive si elle prend ses valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0,+\infty]$. Enfin, deux fonctions numériques sur X sont dites égales μ-presque partout si elles coïncident en dehors d'un sous-ensemble μ-négligeable de X.

3.1- INTÉGRALE SUPÉRIEURE

3.1.1. Rappelons qu'une fonction simple sur X est une fonction numérique μ-mesurable $e : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dont l'image est un sous-ensemble fini $\{a_1, \dots, a_n\}$ de $\mathbb{R}$. Une telle fonction s'écrit canoniquement :

$$e = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}$$

où les sous-ensembles μ-mesurables

$$A_i = \{x \in X \mid e(x) = a_i\} = e^{-1}(\{a_i\})$$

sont deux à deux disjoints et ont pour réunion l'ensemble X. Lorsque tous les a_i sont positifs ou nuls, on dit que e est une fonction simple positive.

3.1.2. Définition. Soient (X,μ) un espace mesuré et $e : X \longrightarrow [0,+\infty]$ une fonction simple positive, de la forme :

$$e = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}$$

où $a_1, \dots, a_n$ sont les valeurs distinctes de e. On appelle intégrale supérieure de e le nombre

$$\int_X e\,d\mu \in [0,+\infty]$$

défini par :

$$\int_X e\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i).$$

Pour définir le produit de deux nombres de $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0,+\infty]$ sans ambiguïté, on utilise la convention $0.\infty = 0$. Lorsque $\mu(A_i) = +\infty$, on a donc :

$$a_i \mu(A_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } a_i = 0 \\ +\infty & \text{si } 0 < a_i \end{cases}$$

3.1.3. Soient $e : X \to [0,+\infty]$ une fonction simple positive et $E \subset X$ un sous-ensemble μ-mesurable de X. Alors, la fonction $e \mathbb{1}_E$ égale à e sur E et nulle sur E^c est encore une fonction simple positive. On pose par définition :

$$\int_E e\,d\mu = \int_X e \mathbb{1}_E \,d\mu$$

Si $e = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}$, on a :

$$\int_E e\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i \cap E),$$

comme on le vérifie aisément.

3.1.4. Lemme. Soit (X,μ) un espace mesuré.

(i) Pour toute fonction simple positive $e : X \to [0,+\infty]$, l'application $\nu : \mathcal{M}_\mu \to [0,+\infty]$ définie par :

$$\nu(E) = \int_E e\,d\mu$$

est une mesure positive sur $\mathcal{M}_\mu$;

(ii) Si $e, f : X \to [0,+\infty]$ sont deux fonctions simples, on a :

$$\int_X (e+f)\,d\mu = \int_X e\,d\mu + \int_X f\,d\mu.$$

<u>Démonstration</u>. (i) Soit $e = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}$ une fonction simple positive. Si $E = \emptyset$, la fonction simple $e\mathbb{1}_E$ est identiquement nulle, d'où il résulte que :

$$\nu(\emptyset) = \int_X 0 \, d\mu = 0.$$

Soit $(E_1, E_2, \dots)$ une suite de sous-ensembles μ-mesurables deux à deux disjoints de X et notons E leur réunion. On a :

$$\nu(E) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{p \geq 1} \mu(E_p \cap A_i)$$
$$= \sum_{p \geq 1} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_p \cap A_i) \right) = \sum_{p \geq 1} \nu(E_p),$$

ce qui achève de démontrer que ν est une mesure positive sur $\mathcal{M}_\mu$.

(ii) Soient $e = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}$ et $f = \sum_{j=1}^{p} b_j \mathbb{1}_{B_j}$ deux fonctions simples positives sur X. Pour montrer la relation

$$\int_X (e+f) \, d\mu = \int_X e \, d\mu + \int_X f \, d\mu,$$

nous allons montrer que l'on a, pour tout sous-ensemble μ-mesurable E de X :

$$\int_E (e+f) \, d\mu = \int_E e \, d\mu + \int_E f \, d\mu.$$

A cet effet, introduisons les mesures positives :

$$\nu(E) = \int_E (e+f) \, d\mu, \quad \nu'(E) = \int_E e \, d\mu, \quad \nu''(E) = \int_E f \, d\mu.$$

Pour montrer que

$$(1) \quad \nu(E) = \nu'(E) + \nu''(E)$$

pour tout $E \in \mathcal{M}_\mu$, observons que E est la réunion disjointe des $E_{ij} = E \cap A_i \cap B_j$ ($1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$). Comme ν, ν' et ν'' sont des mesures positives, il suffit, pour démontrer (1), de prouver que l'on a :

$$\nu(E_{i,j}) = \nu'(E_{i,j}) + \nu''(E_{i,j}) \quad \text{quels que soient } i,j.$$

Or on a :

$$\begin{aligned}\nu(E_{i,j}) &= (a_i + b_j)\mu(E \cap A_i \cap B_j) \\ &= a_i\,\mu(E\cap A_i \cap B_j) + b_j\,\mu(E \cap A_i \cap B_j) \\ &= \nu'(E_{i,j}) + \nu''(E_{i,j}),\end{aligned}$$

et (1) est démontrée. ■

3.1.5- Définition. Soient (X,μ) un espace mesuré et $f : X \longrightarrow [0,+\infty]$ une fonction μ-mesurable positive. On appelle intégrale supérieure de f le nombre $\int_X f d\mu \in [0,+\infty]$ défini par :

$$\int_X f d\mu = \operatorname{Sup}\left\{ \int_X e\, d\mu \;\middle|\; e \text{ fonction simple, } 0 \leqq e \leqq f \right\}$$

Si $E \subset X$ est un sous-ensemble μ-mesurable de X, on pose (cf. 3.1.3) :

$$\int_E f d\mu = \int_X f \mathbb{1}_E \, d\mu,$$

où $f\mathbb{1}_E : X \longrightarrow [0,+\infty]$ est la fonction numérique positive μ-mesurable égale à f sur E et à 0 hors de E.

3.1.6. Proposition. Soient (X,μ) un espace mesuré et $f,g : X \longrightarrow [0,+\infty]$ deux fonctions μ-mesurables positives. On a :

(i) $0 \leqq f \leqq g$ implique $\int_X f d\mu \leqq \int_X g\, d\mu$;

(ii) Pour tout $\lambda \in [0,+\infty[$, on a :

$$\int_X \lambda f\, d\mu = \lambda \int_X f d\mu \,;$$

(iii) $\int_X f d\mu + \int_X g d\mu \leqq \int_X (f+g) d\mu$;

(iV) Si f et g sont égales μ-presque partout, alors
$\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$

Démonstration. (i) et (ii) sont immédiates.

(iii) Soient e, s, $0 \leqq e \leqq f$, $0 \leqq s \leqq g$, deux fonctions simples positives. Alors, $e+s$ est une fonction simple positive qui vérifie :

$$0 \leqq e+s \leqq f+g.$$

On a donc :

$$\int_X (e+s) d\mu \leqq \int_X (f+g) d\mu,$$

d'où, en vertu de 3.1.4 (ii) :

$$\int_X e d\mu + \int_X s d\mu \leqq \int_X (f+g) d\mu.$$

En prenant le sup sur toute les fonctions simples positives $e \leqq f$, puis le sup sur toute les fonctions simples positives $s \leqq g$, on en déduit que :

$$\int_X f d\mu + \int_X g d\mu \leqq \int_X (f+g) d\mu.$$

(iV). Pour démontrer (iv), il suffit de prouver que l'on a, pour toute fonction μ-mesurable positive $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ et tout ensemble μ-négligeable $N \subset X$:

$$\int_X f d\mu = \int_{N^c} f d\mu.$$

Comme $f \mathbb{1}_{N^c} \leqq f$, il résulte immédiatement de (i) que $\int_{N^c} f d\mu \leqq \int_X f d\mu$. Montrons l'inégalité inverse.

A cet effet, soit e, $0 \leqq e \leqq f$ une fonction simple positive, de la forme

$$e = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}$$

Alors, on a :

$$\int_{N^c} e\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i \cap N^c) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i) = \int_X e\, d\mu$$

car $\mu(A_i \cap N) \leqq \mu(N) = 0$. Comme $0 \leqq e \mathbb{1}_{N^c} \leqq f \mathbb{1}_{N^c}$, on en déduit que :

$$\int_X e\, d\mu = \int_X e \mathbb{1}_{N^c} d\mu \leqq \int_X f \mathbb{1}_{N^c} d\mu = \int_{N^c} f\, d\mu.$$

En prenant le sup sur les fonctions simples positives e telles que $e \leqq f$, on en déduit que :

$$\int_X f d\mu \leqq \int_{N^c} f d\mu, \quad \text{d'où} \quad \int_X f d\mu = \int_{N^c} f d\mu. \qquad \blacksquare$$

On notera qu'il résulte de la propriété (iV) que, si $\mu(E) = 0$, alors $\int_E f d\mu = 0$, même si $f(x) = +\infty$ pour tout $x \in E$. On notera que l'on a en fait l'égalité dans la propriété (iii), ce qui signifie que l'intégrale supérieure est en fait additive. Nous allons montrer qu'elle est même dénombrablement additive, c'est à dire que l'on a :

$$\int_X \Big(\sum_{n \geqq 1} f_n\Big) d\mu = \sum_{n \geqq 1} \int_X f_n\, d\mu$$

pour toute suite $(f_1, f_2, \dots)$ de fonctions μ-mesurables positives. Cette propriété résulte du théorème suivant :

¶ 3.1.7. Théorème (de convergence monotone). Soient (X, μ) un espace mesuré et $(f_1, f_2, \dots)$ une suite croissante de fonctions μ-mesurables positives:

$$0 \leqq f_1(x) \leqq f_2(x) \leqq \cdots\cdots \leqq +\infty \text{ pour tout } x \in X.$$

Posons $f = \operatorname{Sup}_n f_n$. Alors f est une fonction μ-mesurable positive et on a:

$$\int_X f d\mu = \operatorname{Sup}_n \int_X f_n d\mu.$$

Démonstration. La mesurabilité de f résulte de la proposition 2.2.3.2. Comme on a par hypothèse $f_n \leqq f_{n+1}$ pour tout $n \geqq 1$, il résulte de 3.1.6 (i) que $\int_X f_n d\mu \leqq \int_X f_{n+1} d\mu$, et donc $\int_X f_n d\mu \xrightarrow[n \to +\infty]{} \operatorname{Sup}_n \int_X f_n d\mu$.

Posons $S = \operatorname{Sup}_n \int_X f_n d\mu$. De la relation $f_n \leqq f$ on déduit que $\int_X f_n d\mu \leqq \int_X f d\mu$ pour tout $n \geqq 1$, et donc que $S \leqq \int_X f d\mu$. Montrons que l'on a aussi

$$\int_X f d\mu \leqq S.$$

A cet effet, fixons une fonction simple positive e telle que $0 \leqq e \leqq f$. Pour tout λ tel que $0 < \lambda < 1$, posons:

$$E_n^\lambda = \{x \in X \mid f_n(x) \geqq \lambda e(x)\}$$

Comme les f_n et e sont μ-mesurables, on définit ainsi un sous-ensemble μ-mesurable $E_n^\lambda \subset X$. Comme la suite $(f_1, f_2, \dots)$ est croissante, on a:

$$E_1^\lambda \subset E_2^\lambda \subset \cdots\cdots \subset E_n^\lambda \subset E_{n+1}^\lambda \subset \cdots\cdots$$

En outre, on a: $X = \bigcup_{n \geqq 1} E_n^\lambda$. En effet, si $f(x) = 0$,