1.3.3.4. Théorème (Hahn). Soient X un ensemble, $\mathcal{R}$ une algèbre de parties de X et $\mu : \mathcal{R} \to [0,+\infty]$ une mesure positive sur $\mathcal{R}$. On suppose qu'il existe une suite $A_1, A_2, \ldots$ d'éléments de $\mathcal{R}$ telle que :

$$X = \bigcup_{n \geq 1} A_n \quad \text{et} \quad \mu(A_n) < +\infty \text{ pour tout } n \geq 1.$$

Désignons par $\mathcal{B}$ la tribu engendrée par $\mathcal{R}$. Alors, on a :

(i) Il existe une unique mesure positive $\bar{\mu}$ sur $\mathcal{B}$ qui prolonge μ, i.e. telle que

$$\mu(A) = \bar{\mu}(A) \quad \text{quel que soit } A \in \mathcal{R} ;$$

(ii) La tribu $\mathcal{B}_{\bar{\mu}}$ des ensembles $\bar{\mu}$-mesurables de X coïncide avec la tribu des parties $A \subset X$ vérifiant la propriété suivante :

$$(\forall E \subset A)\,(\forall F \subset A^c), \text{ on a } \mu^*(E \cup F) = \mu^*(E) + \mu^*(F) ;$$

(iii) Une partie $N \subset X$ est $\bar{\mu}$-négligeable si et seulement si $\mu^*(N) = 0$, c'est à dire s'il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, une suite $N_1, N_2, \ldots$ d'éléments de $\mathcal{R}$ telle que :

$$N \subset \bigcup_{n \geq 1} N_n \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 1} \mu(N_n) \leq \varepsilon.$$

Démonstration. Démontrons tout d'abord l'existence du prolongement $\bar{\mu}$ à $\mathcal{B}$. A cet effet, posons :

$$\mathcal{C} = \{ A \subset X \mid (\forall E \subset A)\,(\forall F \subset A^c),\ \mu^*(E \cup F) = \mu^*(E) + \mu^*(F) \}.$$

Lemme 1. $\mathcal{C}$ est une tribu sur X qui contient les éléments de $\mathcal{B}$ ainsi que les parties $N \subset X$ telles que $\mu^*(N) = 0$. En outre, l'application $\bar{\mu} : \mathcal{C} \to [0,+\infty]$ définie pour tout $A \in \mathcal{C}$ par

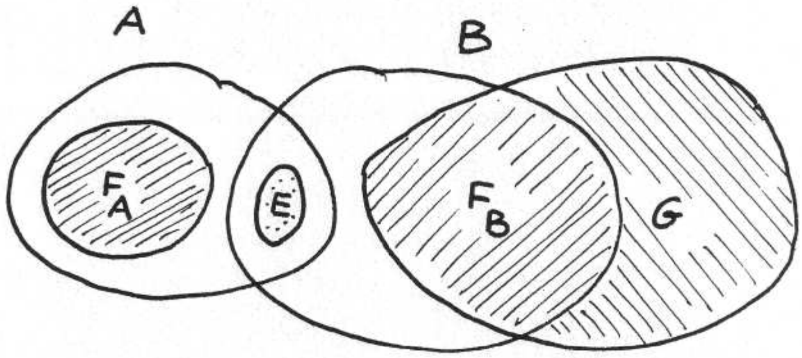
$$\bar{\mu}(A) = \mu^*(A)$$

est une mesure positive $\bar{\mu}$ sur $\mathcal{C}$ qui prolonge la mesure μ sur $\mathcal{R}$.

Démonstration. D'après la proposition 1.3.3.3 (iv), on sait déjà que $\mathcal{R} \subset \mathcal{C}$. Comme X est réunion dénombrable de parties $A_n \in \mathcal{R}$, il suffit, pour montrer que $\mathcal{C}$ est une tribu sur X, de montrer qu'elle est stable par réunions dénombrables et par passage au complémentaire.

Il est clair que, si $A \in \mathcal{C}$, alors $A^c \in \mathcal{C}$. Il nous suffit donc, pour prouver que $\mathcal{C}$ est une tribu, de montrer qu'elle est stable par réunions dénombrables. A cet effet, commençons par montrer que $\mathcal{C}$ est stable par intersections finies. Soient $A, B \in \mathcal{C}$ et considérons $E \subset A \cap B$, $F \subset (A \cap B)^c$. Posons :

$$F_A = F \cap A, \quad F_B = F \cap B \quad \text{et} \quad G = F \setminus (A \cup B)$$

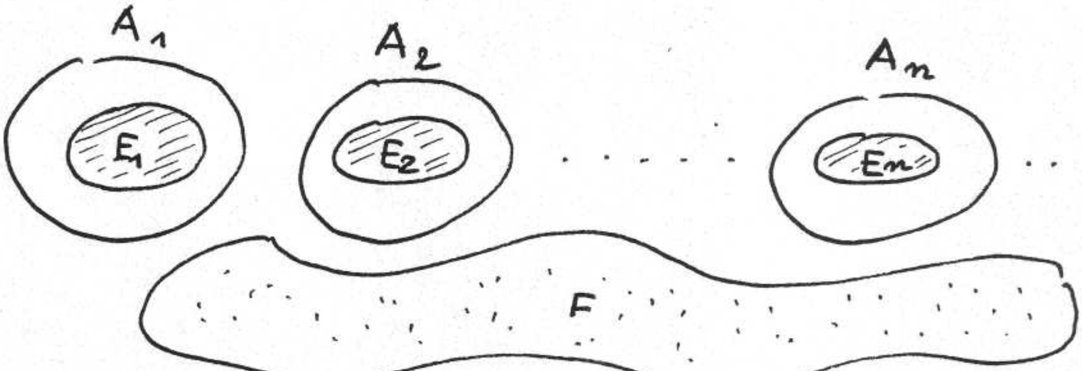


On a :

$$\begin{aligned} \mu^*(E \cup F) &= \mu^*(E \cup F_A) + \mu^*(G \cup F_B) && (\text{car } A \in \mathcal{C}) \\ &= \mu^*(F_A) + \mu^*(E) + \mu^*(F_B) + \mu^*(G) && (\text{car } B \in \mathcal{C}) \\ &\geqq \mu^*(E) + \mu^*(F) && (\text{car } F = F_A \cup F_B \cup G) \end{aligned}$$

Comme on a, par ailleurs, $\mu^*(E \cup F) \leqq \mu^*(E) + \mu^*(F)$, on en déduit que $\mu^*(E \cup F) = \mu^*(E) + \mu^*(F)$, ce qui prouve que $A \cap B \in \mathcal{C}$. Il s'ensuit que $\mathcal{C}$ est stable par intersections finies, et donc aussi par réunions finies (puisque $\mathcal{C}$ est stable par passage au complémentaire).

On peut donc se limiter, pour prouver que $\mathcal{C}$ est stable par réunions dénombrables, à montrer que $\mathcal{C}$ est stable par réunions dénombrables disjointes. Soient donc $A_1, A_2, \dots$ une suite de parties $A_n \in \mathcal{C}$ qui sont deux à deux disjointes. Posons $A = \bigcup_{n \geq 1} A_n$ et soient $E \subset A$, $F \subset A^c$



On a, pour $n \geqq 1$ fixé, en posant $E_n = E \cap A_n$:

$$\begin{aligned}\mu^*(E \cup F) &\geqq \mu^*(E_1 \cup \dots \cup E_n \cup F) \\ &= \mu^*(E_1) + \mu^*(E_2 \cup \dots \cup E_n \cup F) \quad (\text{car } A_1 \in \mathscr{C}) \\ &= \mu^*(E_1) + \mu^*(E_2) + \mu^*(E_3 \cup \dots \cup E_n \cup F) \quad (\text{car } A_2 \in \mathscr{C}) \\ &\ \vdots \\ &= \mu^*(E_1) + \mu^*(E_2) + \dots + \mu^*(E_n) + \mu^*(F) \\ &\qquad (\text{car } A_n \in \mathscr{C}).\end{aligned}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit que :

$$\mu^*(E \cup F) \geqq \sum_{n \geqq 1} \mu^*(E_n) + \mu^*(F) \geqq \mu^*(E) + \mu^*(F),$$

d'où $\mu^*(E \cup F) = \mu^*(E) + \mu^*(F)$, et donc $A \in \mathscr{C}$.

Nous avons donc ainsi démontré que $\mathscr{C}$ est une tribu, et elle contient $\mathscr{R}$ en vertu de 1.3.3.3 (iv). Comme $\mathscr{B}$ est engendrée par $\mathscr{R}$, on en déduit que $\mathscr{B} \subset \mathscr{C}$.

Considérons alors l'application $\bar{\mu} : \mathscr{C} \to [0, +\infty]$ définie par $\bar{\mu}(A) = \mu^*(A)$ pour $A \in \mathscr{C}$. Comme $\phi \in \mathscr{R}$, on a :

$$\bar{\mu}(\phi) = \mu(\phi) = 0.$$

Soit par ailleurs $A_1, A_2, \dots$ une suite de parties de X appartenant à $\mathscr{C}$ et deux à deux disjointes. Le raisonnement ci-dessus, appliqué à $E = \bigcup_{n \geqq 1} A_n$ et $F = \phi$ donne alors $\mu^*(\bigcup_{n \geqq 1} A_n) \geqq \sum_{n \geqq 1} \mu^*(A_n)$ et, comme

$\mu^*(\bigcup_{n\geqq 1} A_n) \leqq \sum_{n\geqq 1} \mu^*(A_n)$ en vertu de 1.3.3.3 (iii), on obtient finalement :

$$\mu^*(\bigcup_{n\geqq 1} A_n) = \sum_{n\geqq 1} \mu^*(A_n).$$

Ceci démontre que $\bar{\mu}$ est bien une mesure positive sur $\mathscr{C}$. Pour achever la démonstration du lemme 1, il reste à montrer que toute partie $N\subset X$ telle que $\mu^*(N)=0$ appartient à $\mathscr{C}$. Soit N une telle partie. Pour $E\subset N$ et $F\subset N^c$, on a :

$$\begin{aligned}\mu^*(F) &\leqq \mu^*(E\cup F) \leqq \mu^*(E)+\mu^*(F)\\ &\leqq \mu^*(N)+\mu^*(F)=\mu^*(F),\end{aligned}$$

d'où $\mu^*(E\cup F)=\mu^*(F)=\mu^*(F)+\mu^*(E)$, ce qui prouve que $N\in\mathscr{C}$. ■

<u>Démonstration de (i)</u>. D'après le lemme 1, la restriction de $\bar{\mu}$ à $\mathscr{B}$ est une mesure positive sur $\mathscr{B}$ qui coïncide avec μ sur $\mathscr{R}$. Soit ν une autre mesure positive sur $\mathscr{B}$ qui coïncide avec μ sur $\mathscr{R}$, et montrons que $\nu=\bar{\mu}$. Par hypothèse, il existe une suite $A_1, A_2, \dots$ d'éléments de $\mathscr{R}$ telle que

$$X=\bigcup_{n\geqq 1} A_n \quad \text{et} \quad \mu(A_n)<+\infty \text{ pour tout } n\geqq 1.$$

Comme $\mathscr{R}$ est une algèbre, on peut sans perte de généralité supposer que les A_n sont deux à deux disjoints. Pour tout $A\in\mathscr{B}$, on a :

$$A=\bigcup_{n\geqq 1}(A\cap A_n)$$

où les $A\cap A_n\in\mathscr{B}$ sont deux à deux disjoints, d'où

$$\bar{\mu}(A)=\sum_{n\geqq 1}\bar{\mu}(A\cap A_n) \quad \text{et}$$

$$\nu(A)=\sum_{n\geqq 1}\nu(A\cap A_n).$$

Pour montrer que $\nu=\bar{\mu}$, il suffit de montrer que

$$\nu(A\cap A_n) = \bar{\mu}(A\cap A_n) \quad \text{pour tout } n \geqq 1 \text{ et tout } A\in\mathcal{B}.$$

On peut ainsi, pour montrer que $\nu(A)=\bar{\mu}(A)$ pour tout $A\in\mathcal{B}$, supposer que A est contenu dans $B\in\mathcal{R}$ avec $\mu(B)<+\infty$. Soit $A_1, A_2, \dots$ une suite de parties de X appartenant à $\mathcal{R}$ telle que

$$A \subset \bigcup_{n\geqq 1} A_n .$$

On a :

$$\nu(A) \leqq \nu\Big(\bigcup_{n\geqq 1} A_n\Big) \leqq \sum_{n\geqq 1} \nu(A_n) = \sum_{n\geqq 1} \mu(A_n),$$

d'où $\nu(A) \leqq \mu^*(A) = \bar{\mu}(A)$. De même, on a :

$$\nu(B-A) \leqq \bar{\mu}(B-A).$$

On en déduit, par addition de ces deux inégalités, que

$$\nu(A)+\nu(B-A) \leqq \bar{\mu}(A)+\bar{\mu}(B-A).$$

Or, le premier membre est égal à $\nu(B)=\mu(B)$, et le second membre aussi, de sorte que l'on a nécessairement

$$\nu(A) = \bar{\mu}(A)$$

et donc $\nu = \bar{\mu}$. Ceci achève la démonstration de (i).

<u>Démonstration de (iii).</u> Si $\mu^*(N)=0$, il existe pour tout $\varepsilon>0$ une suite $N_1^\varepsilon, N_2^\varepsilon, \dots$ d'éléments de $\mathcal{R}$ telle que :

$$N \subset \bigcup_{n\geqq 1} N_n^\varepsilon \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqq 1} \mu(N_n^\varepsilon) \leqq \varepsilon.$$

Posons $B^\varepsilon = \bigcup_{n\geqq 1} N_n^\varepsilon \in \mathcal{B}$. On a :

$$N \subset B^\varepsilon \quad \text{et} \quad \bar{\mu}(B^\varepsilon) = \bar{\mu}\Big(\bigcup_{n\geqq 1} N_n^\varepsilon\Big) \leqq \sum_{n\geqq 1} \mu(N_n^\varepsilon) \leqq \varepsilon.$$

Faisons $\varepsilon = \frac{1}{n}$. On construit ainsi une suite $B_1, B_2, \ldots$ d'éléments de $\mathcal{B}$ telle que :

$$N \subset B_n \text{ pour tout } n \geqq 1 \text{ et } \bar{\mu}(B_n) \leqq \frac{1}{n}.$$

Quitte à remplacer cette suite par $B_1, B_1 \cap B_2, B_1 \cap B_2 \cap B_3, \ldots$ on peut supposer que $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$. Comme $\bar{\mu}(B_1) < +\infty$, on a :

$$\bar{\mu}\left(\bigcap_{n \geqq 1} B_n\right) = \lim_{n \to \infty} \bar{\mu}(B_n) = 0 .$$

Posons $B = \bigcap_{n \geqq 1} B_n \in \mathcal{B}$; on a :

$$N \subset B \quad \text{et} \quad \bar{\mu}(B) = 0,$$

de sorte que N est $\bar{\mu}$-négligeable. Supposons inversement que N soit $\bar{\mu}$-négligeable. Alors, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que

$$N \subset B \quad \text{et} \quad \bar{\mu}(B) = 0,$$

d'où :

$$\mu^*(N) \leqq \mu^*(B) = \bar{\mu}(B) = 0.$$

Il s'ensuit que $\mu^*(N) = 0$, ce qui prouve (iii).

<u>Démonstration de (ii)</u>. D'après ce qui précède, $\mathcal{B}_{\bar{\mu}}$ est la tribu des parties de X de la forme $B \cup N$ où $B \in \mathcal{B}$ et où $\mu^*(N) = 0$. D'après le lemme 1, on a :

$$\mathcal{B}_{\bar{\mu}} \subset \mathcal{C}$$

Montrons l'inclusion inverse. Soit $A \in \mathcal{C}$ et montrons que $A \in \mathcal{B}_{\bar{\mu}}$. En utilisant le fait que X est réunion d'une suite croissante $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ d'éléments de $\mathcal{R}$ telle que $\mu(A_n) < +\infty$ pour tout $n \geqq 1$, on se ramène à prouver que, si $A \in \mathcal{C}$ est contenu dans $B \in \mathcal{B}$ avec $\bar{\mu}(B) < +\infty$, alors $A \in \mathcal{B}_{\bar{\mu}}$.

Considérons alors $C = B - A$. En utilisant la définition de $\mu^*(C)$, on montre comme dans la preuve de (iii) qu'il existe une suite décroissante

$$E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_n \supset E_{n+1} \supset \cdots .$$

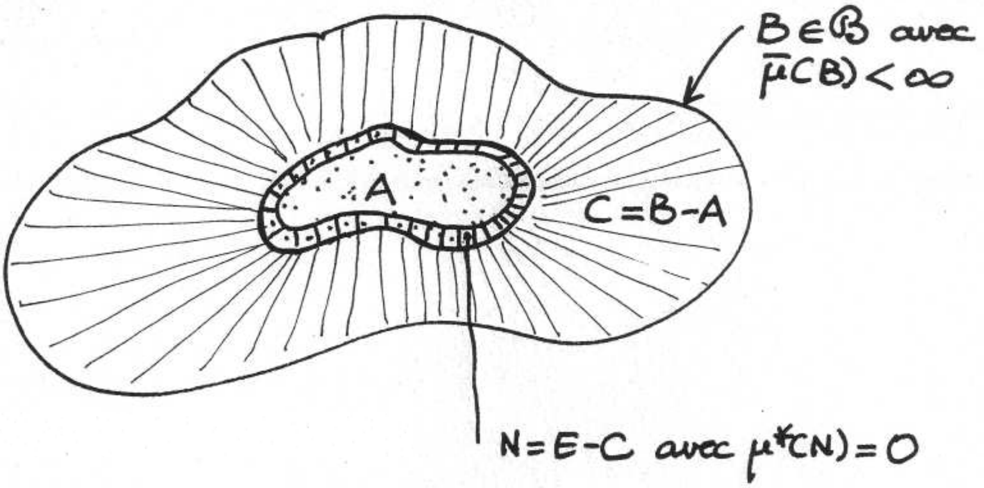
d'éléments de $\mathcal{B}$ vérifiant :

$$C \subset E_n \text{ pour tout } n \geqq 1, \; E_n \subset B, \text{ et}$$
$$\bar{\mu}(C) \leqq \mu(E_n) \leqq \bar{\mu}(C) + \frac{1}{n} \quad \text{pour tout } n \geqq 1.$$

Posons $E = \bigcap_{n \geqq 1} E_n \in \mathcal{B}$. On a $C \subset E$, d'où

$$\bar{\mu}(C) \leqq \bar{\mu}(E) = \lim_{n \to \infty} \mu(E_n) \leqq \bar{\mu}(C),$$

et donc $\bar{\mu}(C) = \bar{\mu}(E)$. Il s'ensuit que $E - C = N$ est $\bar{\mu}$-négligeable.



On a alors : $A = (B-E) \cup N$ avec $B - E \in \mathcal{B}$ et $\mu^*(N) = 0$, ce qui prouve que $A \in \mathcal{B}_{\bar{\mu}}$ et achève la démonstration du théorème de Hahn. ■

1.3.3.5 - Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^p$ - Il résulte de la construction de la mesure de Lebesgue λ sur l'algèbre des parties qui sont réunions finies de pavés et du théorème de Hahn, l'existence d'une unique mesure positive λ sur la tribu des Boréliens de $\mathbb{R}^p$ qui vérifie :

$$\lambda\Big(\prod_{i=1}^{p} (a_i, b_i)\Big) = \prod_{i=1}^{p} (b_i - a_i).$$

Cette mesure λ s'étend en une mesure positive sur la tribu $\mathcal{B}_\lambda$ des parties de $\mathbb{R}^p$ qui sont réunion d'un Borélien et d'un ensemble λ-négligeable. Pour tout $A \in \mathcal{B}_\lambda$, on a :

$$\lambda(A) = \inf \left\{ \sum_{n \geq 1} \lambda(P_n) \mid P_n \text{ est un pavé pour tout } n \text{ et } A \subset \bigcup_{n \geq 1} P_n \right\}.$$

En outre, un sous-ensemble $N \subset \mathbb{R}^p$ est λ-négligeable s'il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, une suite $P_1, P_2, \ldots$ de pavés telle que

$$N \subset \bigcup_{n \geq 1} P_n \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 1} \lambda(P_n) \leqq \varepsilon.$$

On dit que la mesure λ sur la tribu $\mathcal{B}_\lambda$ des parties λ-mesurables est la <u>mesure de Lebesgue</u> de $\mathbb{R}^p$. D'après 1.2.4, cette mesure λ induit une mesure positive sur toute partie λ-mesurable A de $\mathbb{R}^p$, qui est appelée la <u>mesure de Lebesgue de A</u>, et que l'on note λ_A.

1.4- ENSEMBLES LEBESGUE-MESURABLES

<u>1.4.1</u>. Sur le segment fermé borné $I = [0, 1]$ de $\mathbb{R}$, considérons la relation d'équivalence :

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}.$$

D'après l'axiome du choix, il existe un sous-ensemble $A \subset [0,1]$ qui rencontre chaque classe d'équivalence de la relation ci-dessus en un point et un seul.
Pour tout $r \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$, posons :

$$A_r = A + r = \{ a + r \mid a \in A \}.$$

On définit ainsi des sous-ensembles $A_r \subset [-1, 2]$, en nombre au plus dénombrable. Par ailleurs, ces A_r sont deux à deux disjoints. En effet, si $A_r \cap A_s \neq \emptyset$, il existe $a \in A$ et $b \in A$ tels que $a + r = b + s$, d'où $a - b = s - r \in \mathbb{Q}$ et donc $a \sim b$. Comme A rencontre chaque classe d'équivalence en un seul point, on en déduit que $a = b$ et donc que $r = s$.

1.4.2 - Proposition. *L'ensemble A n'est pas Lebesgue-mesurable. En particulier, il n'est ni Borélien ni négligeable.*

Démonstration. Notons tout d'abord que, si E est une réunion finie d'intervalles bornés, alors E+r est une réunion finie d'intervalles bornés et on a :

$$\lambda(E+r) = \lambda(E).$$

Il s'ensuit immédiatement que $\lambda^*(E+r) = \lambda^*(E)$ pour tout $E \subset \mathbb{R}$.

Supposons par l'absurde que A soit lebesgue mesurable. En utilisant la caractérisation des ensembles Lebesgue-mesurables donnée par la condition (ii) du théorème de Hahn, on montre aisément que $A_r = A+r$ est lebesgue mesurable et vérifie $\lambda(A_r) = \lambda(A)$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$. On a donc :

$$\lambda\Big(\bigcup_{r\in[-1,1]\cap\mathbb{Q}} A_r\Big) = \sum_{r\in[-1,1]\cap\mathbb{Q}} \lambda(A_r) = \sum_{r\in[-1,1]\cap\mathbb{Q}} \lambda(A)$$

Mais on a, par ailleurs :

$$[0,1] \subset \bigcup_{r\in[-1,1]\cap\mathbb{Q}} A_r \subset [-1,2],$$

d'où :

$$1 = \lambda([0,1]) \leqq \sum_{r\in[-1,1]\cap\mathbb{Q}} \lambda(A) \leqq \lambda([-1,2]) = 3$$

La première inégalité implique que $\lambda(A) > 0$. Mais alors, la seconde inégalité se réduit à

$$+\infty \leqq 3,$$

ce qui est absurde. Comme les Boréliens et les négligeables sont lebesgue mesurables, la proposition est démontrée. ∎

1.4.3. La tribu des Boréliens de $\mathbb{R}$ et celle des sous-ensembles Lebesgue-mesurables de $\mathbb{R}$ ne sont donc pas égales à $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Pour construire un ensemble non Lebesgue-mesurable, nous avons utilisé l'axiome du choix. On peut montrer que l'on ne peut construire un ensemble non mesurable de $\mathbb{R}$ sans faire appel à l'axiome du choix. En d'autres termes, sauf à le faire exprès, on ne manipulera dans la pratique aucun ensemble non mesurable au sens de Lebesgue. On peut donc considérer que la mesurabilité d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est toujours - sauf cas réellement exceptionnel - un fait acquis, même si la vérification de ce fait peut se révéler scholastiquement ardue pour le débutant.