en faisant tendre n vers $+\infty$:

$$\sum_{n\geqq 1} \lambda(P_n) \leqq \lambda(P).$$

Pour montrer l'inégalité inverse, fixons $\varepsilon>0$ et écrivons

$$P=\prod_{i=1}^{p}(a_i,b_i), \quad P_n=\prod_{i=1}^{p}(a_{n,i},b_{n,i}).$$

Fixons $\delta>0$ suffisamment petit pour que l'on ait :

$$a_i<a_i+\delta<b_i-\delta<b_i \quad \text{pour tout } i=1,\dots,p,$$

et posons

$$P_\delta=\prod_{i=1}^{p}[a_i+\delta, b_i-\delta].$$

Puisque $P=\bigcup_{n\geqq 1} P_n$, le pavé P_δ est recouvert par les pavés ouverts

$$P_{n,\varepsilon}=\prod_{i=1}^{p}\left]a_{n,i}-\frac{\varepsilon}{2^n}, b_{n,i}+\frac{\varepsilon}{2^n}\right[.$$

D'après la propriété de Borel-Lebesgue, il existe un entier $N\geqq 1$ tel que

$$P_\delta \subset \bigcup_{n=1}^{N} P_{n,\varepsilon}$$

Par sous-additivité finie de λ (*), on a :

$$\lambda(P_\delta)\leqq \lambda\Big(\bigcup_{n=1}^{N} P_{n,\varepsilon}\Big)\leqq \sum_{n=1}^{N}\lambda(P_{n,\varepsilon})$$

$$\leqq \sum_{n\geqq 1}\lambda(P_{n,\varepsilon}).$$

Or, puisque les P_n sont inclus dans P, les nombres

(*) Cette sous-additivité finie résulte immédiatement de la relation $\lambda(A\cup B)+\lambda(A\cap B)=\lambda(A)+\lambda(B)$, pour $A, B\in\mathcal{R}_0$.

$|a_{n,i}|$, $|b_{n,i}|$ sont bornés par une constante indépendante de n. On en déduit qu'il existe une constante $C > 0$ telle que l'on ait, pour $\varepsilon < 1$:

$$\prod_{i=1}^{p} \left(b_{n,i} - a_{n,i} + \frac{\varepsilon}{2^{n-1}}\right) \leqq \prod_{i=1}^{p} (b_{n,i} - a_{n,i}) + C\frac{\varepsilon}{2^{n-1}}.$$

Il s'ensuit que :

$$\lambda(P_\delta) \leqq \sum_{n \geqq 1} \lambda(P_{n,\varepsilon}) \leqq \sum_{n \geqq 1} \lambda(P_n) + C\varepsilon \sum_{n \geqq 1} \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= \sum_{n \geqq 1} \lambda(P_n) + 2C\varepsilon.$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient :

$$\lambda(P_\delta) \leqq \sum_{n \geqq 1} \lambda(P_n).$$

Mais $\lambda(P_\delta) \xrightarrow[\delta \to 0]{} \lambda(P)$, de sorte que l'on obtient finalement :

$$\lambda(P) \leqq \sum_{n \geqq 1} \lambda(P_n),$$

et donc $\lambda(P) = \sum_{n \geqq 1} \lambda(P_n)$. Ceci achève de montrer que λ est une mesure positive sur $\mathcal{R}$. ∎

<u>1.3.2.6</u>. On observera que $\mathbb{R}^p$ est réunion dénombrable d'une suite de parties de $\mathcal{R}$. En effet, les pavés

$$P_n = \underbrace{[-n, n] \times [-n, n] \times \cdots \times [-n, n]}_{p \text{ facteurs}}$$

ont pour réunion $\mathbb{R}^p$ et pour volume p-dimensionnel :

$$\lambda(P_n) = (2n)^p < +\infty.$$

Pour étendre la mesure λ sur $\mathcal{R}$ en une mesure positive sur les boréliens de $\mathbb{R}^p$, on utilisera le résultat suivant, dû à Hahn :

1.3.3 - Le théorème de Hahn.

1.3.3.1. Le théorème de Hahn permet d'étendre une mesure positive sur une algèbre de parties d'un espace X à la tribu engendrée par les parties de cette algèbre. Dans ce qui suit, nous désignerons par X un ensemble, par $\mathcal{R}$ une algèbre de parties de X, et par $\mathcal{B}$ la tribu engendrée par $\mathcal{R}$. On supposera donnée une mesure positive μ sur $\mathcal{R}$ vérifiant la propriété suivante :

(1) Il existe une suite $A_1, A_2, \ldots$ d'éléments de $\mathcal{R}$ telle que $\mu(A_n) < +\infty$ pour tout $n \geqq 1$ et $X = \bigcup_{n \geqq 1} A_n$.

Sous ces hypothèses, nous allons montrer que μ admet une unique extension en une mesure positive sur $\mathcal{B}$. D'après 1.3.2.5, les hypothèses sont vérifiées pour $X = \mathbb{R}^p$, $\mathcal{R}$ étant l'algèbre des parties de $\mathbb{R}^p$ qui sont réunions finies de pavés de $\mathbb{R}^p$, et $\mu = \lambda$ étant la mesure définie en 1.3.2.3. Avant de formuler le théorème de Hahn, introduisons la notion de mesure extérieure.

1.3.3.2 - Mesure extérieure. Soient X un ensemble, $\mathcal{R}$ une algèbre de parties de X et $\mu : \mathcal{R} \longrightarrow [0, +\infty]$ une mesure positive sur $\mathcal{R}$.

Définition. Pour toute partie $A \subset X$, on appelle mesure extérieure de A, et on note $\mu^*(A)$, le nombre

$$\mu^*(A) = \operatorname{Inf} \left\{ \sum_{n \geqq 1} \mu(A_n) \;\middle|\; A_n \in \mathcal{R} \text{ et } A \subset \bigcup_{n \geqq 1} A_n \right\} \in [0, +\infty].$$

La mesure extérieure $\mu^*(A)$ est définie pour toute partie $A \subset X$, même pour celles qui n'appartiennent pas à la tribu $\mathcal{B}$ engendrée par les parties de $\mathcal{R}$. Si $\mathcal{R}$ est une tribu, on vérifie aisément que l'on a :

$$\mu^*(A) = \operatorname{Inf}\{\mu(B) \mid B \in \mathcal{R} \text{ et } A \subset B\}.$$

Par exemple, si X est un ensemble infini non dénombrable et si $\mathcal{R}$ est la tribu des parties de X qui sont dénombrables ou de complémentaire dénombrable, la formule

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ est dénombrable} \\ 1 & \text{si } A^c \text{ est dénombrable} \end{cases}$$

définit une mesure sur $\mathcal{R}$ (le vérifier) pour laquelle on a, quelle que soit la partie $A \subset X$:

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ est dénombrable} \\ 1 & \text{si } A \text{ n'est pas dénombrable} \end{cases}$$

Si $X = A_1 \cup A_2$ est une partition de X en deux sous-ensembles A_1 et A_2 non dénombrables tels que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, on a :

$$\mu^*(A_1 \cup A_2) = \mu^*(X) = 1 \quad \text{et}$$
$$\mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) = 1 + 1 = 2,$$

de sorte que μ^* n'est certainement pas une mesure sur $\mathcal{P}(X)$. On a toutefois :

1.3.3.3. Proposition. Soient X un ensemble, $\mathcal{R}$ une algèbre de parties de X et $\mu : \mathcal{R} \to [0, +\infty]$ une mesure positive sur $\mathcal{R}$ vérifiant la condition (1). Alors on a :

(i) $\forall A \in \mathcal{R}$, $\mu^*(A) = \mu(A)$;

(ii) $\forall A, B \subset X$, on a : $A \subset B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$;

(iii) Pour toute suite $A_1, A_2, \dots$ de parties de X, on a :

$$\mu^*\Big(\bigcup_{n \geq 1} A_n\Big) \leq \sum_{n \geq 1} \mu^*(A_n);$$

(iv) Si $A \in \mathcal{R}$ est fixée, on a pour toute $E \subset A$ et toute $F \subset A^c$:
$$\mu^*(E \cup F) = \mu^*(E) + \mu^*(F).$$

Démonstration : (ii) est immédiate.

(i) Soit $A \in \mathcal{R}$. En prenant $A_1 = A$, $A_2 = A_3 = \ldots = \phi$, on obtient que $\mu^*(A) \leqq \mu(A)$. Si $A_1, A_2, \ldots$ est une suite d'éléments de $\mathcal{R}$ telle que $A \subset \bigcup_{n \geqq 1} A_n$, on a : $A = \bigcup_{n \geqq 1} B_n$ avec $B_n = A_n \cap A \in \mathcal{R}$. En adaptant les assertions (ii) et (iv) du théorème 1.2.5 au cas d'une mesure sur une algèbre, on en déduit que :
$$\mu(A) = \lim_{n \to \infty} \mu(B_1 \cup \ldots \cup B_n)$$
$$\leqq \sum_{n \geqq 1} \mu(B_n) \leqq \sum_{n \geqq 1} \mu(A_n),$$
et donc que
$$\mu(A) \leqq \mu^*(A).$$

(iii) Soit $A_1, A_2, \ldots$ une suite de parties de X, et montrons que
$$\mu^*\Big(\bigcup_{n \geqq 1} A_n\Big) \leqq \sum_{n \geqq 1} \mu^*(A_n).$$
On peut supposer, sans perte de généralité, que $\sum_{n \geqq 1} \mu^*(A_n) < +\infty$. Fixons $\varepsilon > 0$. Pour tout entier $n \geqq 1$, il existe des parties $A_n^k \in \mathcal{R}$ telles que :
$$A_n \subset \bigcup_k A_n^k \quad \text{et} \quad \sum_k \mu(A_n^k) \leqq \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$
Alors, les A_n^k sont des éléments de $\mathcal{R}$

tels que $\bigcup_{n\geq 1} A_n \subset \bigcup_{n,k} A_n^k$ et qui vérifient :

$$\sum_{n,k} \mu(A_n^k) = \sum_{n\geq 1} \left(\sum_k \mu(A_n^k)\right) \leq \sum_{n\geq 1} \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

$$= \sum_{n\geq 1} \mu^*(A_n) + \varepsilon .$$

On en déduit que

$\mu^*(\bigcup_{n\geq 1} A_n) \leq \sum_{n\geq 1} \mu^*(A_n) + \varepsilon$ et donc, en faisant tendre ε vers 0 :

$$\mu^*(\bigcup_{n\geq 1} A_n) \leq \sum_{n\geq 1} \mu^*(A_n).$$

(iv) Fixons $A \in \mathcal{R}_0$ et soient $E \subset A$, $F \subset A^c$. D'après (iii), on a :

$$\mu^*(E\cup F) \leq \mu^*(E) + \mu^*(F).$$

Montrons qu'il y a en fait égalité. A cet effet, on peut supposer sans perte de généralité que $\mu^*(E\cup F) < +\infty$. Soit $A_1, A_2, \ldots$ une suite d'éléments de $\mathcal{R}_0$ telle que $E\cup F \subset \bigcup_{n\geq 1} A_n$. Posons $E_n = A \cap A_n$, $F_n = A_n \setminus A$.

On a : $E \subset \bigcup_{n\geq 1} E_n$, $F \subset \bigcup_{n\geq 1} F_n$ et, comme E_n, F_n appartiennent à $\mathcal{R}_0$, il vient :

$$\mu^*(E) + \mu^*(F) \leq \sum_{n\geq 1} \mu(E_n) + \sum_{n\geq 1} \mu(F_n)$$

$$= \sum_{n\geq 1} \mu(E_n) + \mu(F_n)$$

$$= \sum_{n\geq 1} \mu(E_n \cup F_n) = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n).$$

On en déduit que :

$\mu^*(E) + \mu^*(F) \leq \mu^*(E\cup F)$, d'où (iv). ■