puisque $(B\cup Z)^c = B^c \cap Z^c \in \mathcal{M}$ et que $B^c \cap (Z-N) \subset Z$ avec $\mu(Z)=0$, i.e. $B^c \cap (Z-N)$ est μ-négligeable, on obtient que $(B\cup N)^c \in \mathcal{M}_\mu$. ■

Pour toute partie μ-mesurable $A = B\cup N$ ($B\in\mathcal{M}$, N μ-négligeable), posons :

$$\mu(A) = \mu(B).$$

On définit ainsi un nombre $\mu(A)\in[0,+\infty]$ qui ne dépend que de A, et pas de la décomposition $A = B\cup N$. En effet, si $A = B_1 \cup N_1$ avec $B_1\in\mathcal{M}$ et N_1 μ-négligeable, il existe $Z_1 \in \mathcal{M}$ tel que $N_1 \subset Z_1$ et $\mu(Z_1)=0$, d'où :

$$B \subset A = B_1 \cup N_1 \subset B_1 \cup Z_1$$

et donc

$$\mu(B) \leqq \mu(B_1\cup Z_1) \leqq \mu(B_1) + \mu(Z_1) = \mu(B_1).$$

En échangeant les rôles de B et de B_1, on obtient

$$\mu(B_1) \leqq \mu(B)$$

d'où, finalement, $\mu(B) = \mu(B_1)$. Ainsi, $\mu(A)$ est défini sans ambiguité pour $A\in\mathcal{M}_\mu$. On a alors :

<u>1.2.7.3 - Proposition</u>. <u>L'application $A\in\mathcal{M}_\mu \longmapsto \mu(A)\in[0,+\infty]$ est une mesure positive sur $\mathcal{M}_\mu$.</u>

<u>Démonstration</u>. Il suffit de montrer que, si $A_1, A_2, \ldots$ est une suite de parties μ-mesurables deux à deux disjointes, on a :

$$\mu\Big(\bigcup_{n\geqq 1} A_n\Big) = \sum_{n\geqq 1} \mu(A_n).$$

A cet effet, écrivons $A_n = B_n \cup N_n$ avec $B_n \in \mathcal{M}$ et N_n μ-négligeable. On a :

$$\bigcup_{n\geq 1} A_n = \left(\bigcup_{n\geq 1} B_n\right) \cup N$$

où $N = \bigcup_{n\geq 1} N_n$ est μ-négligeable et où les $B_n \in \mathcal{M}$ sont deux à deux disjointes. On a donc :

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\geq 1} B_n\right) = \sum_{n\geq 1} \mu(B_n) = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n).$$

■

Ainsi, pour tout espace mesuré $(X, \mathcal{M}, \mu)$, on a construit un espace mesuré $(X, \mathcal{M}_\mu, \mu)$ pour lequel les parties μ-négligeables appartiennent à la tribu des sous-ensembles μ-mesurables. On dit que $(X, \mathcal{M}_\mu, \mu)$ est le <u>complété</u> de l'espace $(X, \mathcal{M}, \mu)$.

1.3 - CONSTRUCTION DE LA MESURE DE LEBESGUE SUR $\mathbb{R}^p$.

<u>1.3.1 - Mesure des pavés</u>. Un <u>pavé</u> de $\mathbb{R}^p$ est par définition un produit d'intervalles bornés (a_i, b_i) $(1 \leq i \leq n)$:

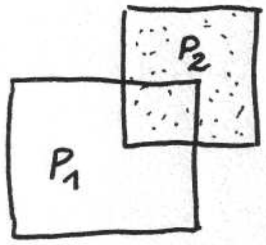
$$P = \prod_{1\leq i\leq p} (a_i, b_i).$$

On ne précise pas ici si (a_i, b_i) est ouvert, fermé ou semi-ouvert. Le volume p-dimensionnel de P est par définition :

$$\lambda(P) = \prod_{1\leq i\leq p} (b_i - a_i).$$

Pour $p = 1$, un pavé est un intervalle borné (a, b), et $\lambda((a,b)) = b - a$ est la longueur de cet intervalle. On a vu (cf. 1.1.8) que les pavés engendrent la tribu Borélienne $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^p$, et on se demande si la connaissance de la mesure des pavés permet de définir une mesure positive sur $\mathcal{B}$. A cet effet, on étend tout d'abord le volume p-dimensionnel aux réunions finies de pavés.

1.3.2. Mesure des réunions finies de pavés - Notons $\mathcal{R}$ l'ensemble des parties de $\mathbb{R}^p$ qui sont réunions finies de pavés de $\mathbb{R}^p$. On vérifie immédiatement qu'une réunion finie de pavés s'écrit toujours comme une réunion finie de pavés deux à deux disjoints.



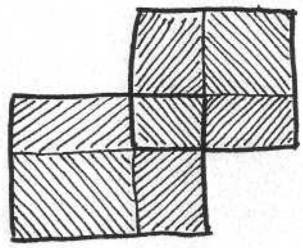


Fig. Décomposition de $P_1 \cup P_2$ en pavés disjoints dans le cas $p=2$.

La famille $\mathcal{R}$ n'est pas une tribu sur $\mathbb{R}^p$, mais elle a néanmoins une structure d'algèbre au sens suivant:

1.3.2.1- Définition. On appelle algèbre sur un ensemble X une famille $\mathcal{R}$ de parties de X vérifiant les conditions suivantes :

(i) $A, B \in \mathcal{R} \Longrightarrow A \cup B \in \mathcal{R}$;
(ii) $A, B \in \mathcal{R} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{R}$;
(iii) $A, B \in \mathcal{R} \Longrightarrow A - B = A \cap B^c \in \mathcal{R}$.

Avec cette définition, on a:

1.3.2.2 - Proposition. La famille $\mathcal{R}$ des parties de $\mathbb{R}^p$ qui sont réunions finies de pavés de $\mathbb{R}^p$ constitue une algèbre sur $\mathbb{R}^p$.

Démonstration. Il est clair que $\mathcal{R}$ est stable par réunions finies et intersections finies. Pour démontrer que, si $A, B \in \mathcal{R}$, alors $A - B \in \mathcal{R}$, on se ramène au cas où A et B sont des pavés, pour lequel la conclusion est immédiate. ∎

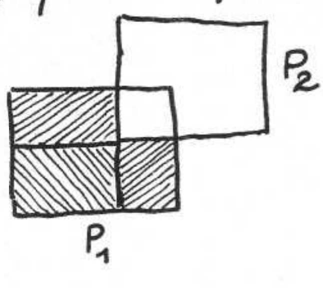


Fig. Décomposition de $P_1 \setminus P_2$ pour $p=2$.

1.3.2.3. Soit $A \in \mathcal{R}_0$. D'après ce qui précède, on sait que A s'écrit comme une réunion de pavés deux à deux disjoints :

$$A = P_1 \cup \cdots \cup P_n .$$

On pose alors :

$$\lambda(A) = \lambda(P_1) + \cdots + \lambda(P_n).$$

On vérifie que le nombre $\lambda(A)$ ainsi défini ne dépend que de A et pas de la décomposition de A en pavés deux à deux disjoints. Cette vérification, fastidieuse et sans intérêt, repose sur le fait que $\lambda(A)$ ne change pas lorsqu'on « raffine » la décomposition de A en pavés deux à deux disjoints. La figure ci-dessous illustre ce principe dans le cas $p=2$.

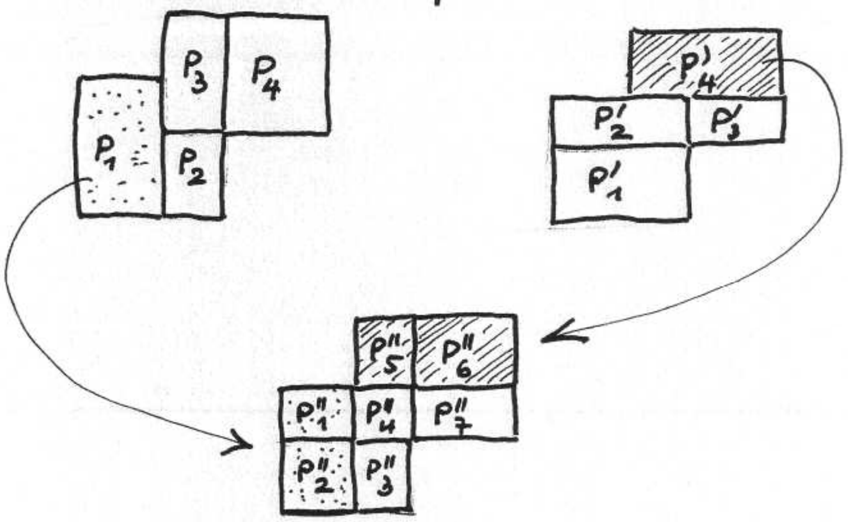


Fig. Raffinement des décompositions de A en réunions disjointes de pavés P_i et P'_j. Cas $p=2$.

Avec cette définition de $\lambda(A)$ pour $A \in \mathcal{R}_0$, il n'est pas difficile de démontrer que l'on a :

$$\lambda(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \lambda(A_1) + \cdots + \lambda(A_n)$$

si les $A_i \in \mathcal{R}_0$ sont deux à deux disjoints. L'application $A \longmapsto \lambda(A)$ possède en fait une propriété de σ-additivité qui en fait une mesure sur l'algèbre $\mathcal{R}_0$ au sens suivant :

1.3.2.4- Définition. Soient X un ensemble et $\mathcal{R}_0$ une algèbre de parties de X. On appelle mesure positive sur $\mathcal{R}$ une application $\mu : \mathcal{R} \longrightarrow [0,+\infty]$ qui vérifie les propriétés suivantes :

(i) $\mu(\emptyset)=0$;

(ii) $\mu(\bigcup_{n\geq 1} A_n)=\sum_{n\geq 1} \mu(A_n)$ si les A_n sont des éléments de $\mathcal{R}$ deux à deux disjoints tels que $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{R}$.

Avec cette définition, on a :

1.3.2.5. Théorème. L'application qui associe à toute partie $A\subset \mathbb{R}^p$ qui est une réunion finie de pavés sa mesure $\lambda(A)$ est une mesure positive sur l'algèbre $\mathcal{R}$ des parties de $\mathbb{R}^p$ qui sont réunions finies de pavés de $\mathbb{R}^p$.

Démonstration. Comme $\lambda(\emptyset)=0$, il suffit de démontrer que, si $A_1, A_2, \dots$ est une suite d'éléments de $\mathcal{R}$ telle que $A_i\cap A_j=\emptyset$ pour $i\neq j$ et $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{R}$, on a :

$$(1) \quad \lambda(\bigcup_{n\geq 1} A_n)=\sum_{n\geq 1} \lambda(A_n).$$

A cet effet, opérons d'abord quelques réductions.

Étape 1. On peut se ramener au cas où $A=\bigcup_{n\geq 1} A_n$ est un pavé.

Supposons en effet que (1) soit vraie lorsque A est un pavé, et montrons que (1) est toujours vraie. Si $A=P_1\cup\cdots\cup P_m$ est une décomposition de A en pavés disjoints, on a en vertu de l'hypothèse :

$$\lambda(\bigcup_{n\geq 1} A_n\cap P_i)=\sum_{n\geq 1} \lambda(A_n\cap P_i), \text{ soit :}$$

$$\lambda(A\cap P_i)=\sum_{n\geq 1} \lambda(A_n\cap P_i).$$

En sommant par rapport à i et en utilisant l'additivité finie de λ, on obtient :

$$\lambda(A) = \sum_{i=1}^{m} \lambda(A \cap P_i) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{n \geqq 1} \lambda(A_n \cap P_i)$$
$$= \sum_{n \geqq 1} \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda(A_n \cap P_i) \right) = \sum_{n \geqq 1} \lambda(A_n),$$

d'où (1) en toute généralité.

Étape 2. On peut se ramener au cas où les A_n et A sont des pavés.

Supposons en effet que (1) soit vraie lorsque les A_n et A sont des pavés, et montrons que (1) est toujours vraie. On peut supposer, sans perte de généralité, que A est un pavé P (étape 1). Écrivons alors chaque A_n comme une réunion finie de pavés P_n^i deux à deux disjoints :

$$A_n = P_n^1 \cup \dots \cup P_n^i \cup \dots \cup P_n^{\nu_n}.$$

Par hypothèse, on a :

$$\lambda\left(\bigcup_{n \geqq 1} A_n\right) = \lambda\left(\bigcup_{n,i} P_n^i\right) = \sum_{n,i} \lambda(P_n^i)$$
$$= \sum_{n \geqq 1} \left(\sum_{i=1}^{\nu_n} \lambda(P_n^i) \right) = \sum_{n \geqq 1} \lambda(A_n),$$

et (1) est vraie en toute généralité.

Étape 3. Démontrons (1) lorsque les $A_n = P_n$ sont des pavés deux à deux disjoints dont la réunion est un pavé $A = P$.

Comme on a : $P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n \subset P$ où les P_i sont des pavés deux à deux disjoints, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda(P_i) = \lambda(P_1 \cup \dots \cup P_n) \leqq \lambda(P) \quad \text{et donc,}$$