Thierry Fack

1. ESPACES MESURÉS

1. ESPACES MESURÉS

1.1- TRIBUS

1.1.1- Définition. Soit X un ensemble. On appelle tribu (ou σ-algèbre) sur X une famille $\mathcal{M}$ de parties de X vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $X \in \mathcal{M}$;
(ii) si $A \in \mathcal{M}$, alors $A^c = X \setminus A \in \mathcal{M}$;
(iii) si $A_1, A_2, \ldots$ est une suite(*) d'éléments de $\mathcal{M}$, alors $A = \bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{M}$.

1.1.2- Espace mesurable. On appelle espace mesurable la donnée d'un couple $(X, \mathcal{M})$ où X est un ensemble et $\mathcal{M}$ une tribu sur X. Les éléments de $\mathcal{M}$ sont alors appelés les parties mesurables de X.

1.1.3- Soit $\mathcal{M}$ une tribu sur un ensemble X. Alors, $\emptyset = X^c \in \mathcal{M}$. Par ailleurs, si $A_1, A_2, \ldots$ est une suite d'éléments de $\mathcal{M}$, la relation :

$$\bigcap_{n \geq 1} A_n = \Big(\bigcup_{n \geq 1} A_n^c \Big)^c$$

montre que $\bigcap_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{M}$. Il s'ensuit que, si $A, B \in \mathcal{M}$, la différence ensembliste $A \setminus B = A \cap B^c$ appartient à $\mathcal{M}$. Ainsi, une tribu est stable par réunion dénombrable, intersection dénombrable, différence ensembliste et passage au complémentaire.

1.1.4. Exemples. Soit X un ensemble. La plus petite tribu sur X est la classe $\{\emptyset, X\}$, et la plus grande est la famille $\mathcal{P}(X)$ de toutes les parties de X. La classe des parties A de X qui sont dénombrable ou de complémentaire dénombrable constitue également une tribu sur X.

1.1.5- Tribu engendrée. Soient X un ensemble et $\mathcal{F}$

(*) Les suites peuvent être éventuellement finies.

une famille quelconque de sous-ensembles de X. L'intersection de toutes les tribus de X qui contiennent $\mathcal{F}$ est encore une tribu qui contient $\mathcal{F}$; la vérification est immédiate. Cette tribu est évidemment la plus petite tribu qui contient $\mathcal{F}$. On dit que c'est la <u>tribu engendrée par $\mathcal{F}$</u>.

<u>1.1.6- Exemples</u>. Soit X un ensemble. La tribu engendrée par les points de X contient nécessairement les parties dénombrables de X, ainsi que celles dont le complémentaire est dénombrable. Il s'ensuit que la tribu engendrée par les points de X est la tribu des parties de X qui sont dénombrables ou de complémentaire dénombrable.

Soient X un ensemble et $A_1, A_2, \ldots$ une partition dénombrable de X en ensembles non vides et deux à deux disjoints. Alors, la tribu engendrée par les A_i $(i=1,2,\ldots)$ est la classe des parties de X de la forme $\bigcup_{j\in J} A_j$, où J décrit l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ de toutes les parties de $\mathbb{N}$.

<u>1.1.7- Tribu des Boréliens</u>. Soit X un espace topologique. On appelle <u>tribu des Boréliens</u> de X la tribu engendrée par les parties ouvertes de X. Les éléments de cette tribu sont appelés les <u>Boréliens</u> de X. Ainsi, toute partie ouverte, ou fermée, est borélienne.

La tribu des Boréliens de $\mathbb{R}^p$ est engendrée par les <u>pavés</u> de la forme

$$P = \prod_{i=1}^{p} (a_i, b_i)$$

où a_i, b_i sont des réels et où (a_i, b_i) désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ d'origine a_i et d'extrémité b_i, qui peut aussi bien être ouvert que semi ouvert ou fermé. En effet, on a :

<u>1.1.8. Proposition</u>. <u>La tribu des Boréliens de $\mathbb{R}^p$ est</u>

engendrée par les pavés de la forme

$$P = \prod_{i=1}^{p} (a_i, b_i).$$

Démonstration. En utilisant la densité de $\mathbb{Q}^p$ dans $\mathbb{R}^p$, on montre aisément que tout ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$ est réunion dénombrable de pavés ouverts de la forme

$$\prod_{i=1}^{p} \left]r_i - \frac{1}{k}, r_i + \frac{1}{k}\right[,$$

où les r_i sont des rationnels et où $k \in \mathbb{N} - \{0\}$. Il s'ensuit que la tribu engendrée par les pavés contient les ouverts de $\mathbb{R}^p$, donc contient la tribu des Boréliens. Par ailleurs, comme tout pavé est un Borélien de $\mathbb{R}^p$, la tribu des Boréliens contient la tribu engendrée par les pavés, d'où la proposition. ■

1.2. MESURES POSITIVES

1.2.1- Définition. Soient X un ensemble et $\mathcal{M}$ une tribu sur X. On appelle mesure positive sur $\mathcal{M}$ une fonction

$$\mu : \mathcal{M} \longrightarrow [0, +\infty]$$

qui vérifie les deux conditions suivantes :

(i) $\mu(\emptyset) = 0$;

(ii) $\mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \sum_{n \geq 1} \mu(A_n)$ pour toute suite $(A_1, A_2, \ldots)$ de parties deux à deux disjointes de $\mathcal{M}$.

Lorsque $\mu(X) < +\infty$, on dit que la mesure μ est finie. Si $\mu(X) = 1$, on dit que μ est une mesure de probabilités. S'il existe une suite $(A_1, A_2, \ldots)$ de parties de $\mathcal{M}$ telle que $\mu(A_n) < +\infty$ pour tout

$n \geqq 1$ et $X = \bigcup_{n \geqq 1}^{\infty} A_n$, on dit que la mesure μ est <u>σ-finie</u>.

La condition (i) a pour but d'écarter le cas pathologique où $\mu(A) = +\infty$ pour tout $A \in \mathcal{M}$. On aurait pu remplacer (i) par la condition :

(i') Il existe $A \in \mathcal{M}$ tel que $\mu(A) < +\infty$.

En effet, s'il existe $A \in \mathcal{M}$ tel que $\mu(A) < +\infty$, on a en vertu de (ii) :

$$\mu(A) = \mu(A \cup \emptyset) = \mu(A) + \mu(\emptyset),$$

d'où il résulte que $\mu(\emptyset) = 0$.

<u>1.2.2</u>. On appelle <u>espace mesuré</u> la donnée d'un triplet $(X, \mathcal{M}, \mu)$ où X est un ensemble, $\mathcal{M}$ une tribu sur X et μ une mesure positive sur $\mathcal{M}$. Les éléments de $\mathcal{M}$ sont appelés les <u>parties mesurables</u> de X. La donnée de $\mathcal{M}$ est souvent implicite ; on écrit alors (X, μ) au lieu de $(X, \mathcal{M}, \mu)$ et on dit que μ est une <u>mesure positive sur X</u> au lieu parler de mesure positive sur $\mathcal{M}$. Lorsque μ est finie (resp. σ-finie), on dit que $(X, \mathcal{M}, \mu)$ est un <u>espace mesuré fini</u> (resp. <u>σ-fini</u>). Lorsque $\mu(X) = 1$, on dit que $(X, \mathcal{M}, \mu)$ est un <u>espace de probabilités</u>.

Les espaces de probabilités fournissent de nombreux exemples d'espaces mesurés. Ces espaces décrivent souvent des expériences aléatoires. L'espace X représente alors l'ensemble des résultats possibles de l'expérience et $\mathcal{M}$ décrit les événements que l'on veut étudier. Par exemple, pour un jet de deux dés, on aura

$$X = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \; ; \; 1 \leqq m, n \leqq 6\}.$$

Le fait que le total des points obtenus est inférieur ou égal à huit est alors un <u>événement</u> $A \in \mathcal{M}$

donné par :

$$A = \{ (m,n) \in X \mid m+n \leqq 8 \}.$$

Dans beaucoup d'expériences aléatoires, la <u>probabilité</u> $\mu(A)$ d'un évènement $A \in \mathcal{M}$ est déterminée de manière empirique en répétant N fois l'expérience, et en notant $N(A)$ le nombre de fois où A est réalisé. La limite

$$\mu(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{N(A)}{N},$$

à supposer qu'elle existe, fournit alors la probabilité $\mu(A) \in [0,1]$.

1.2.3 - Exemples.

1.2.3.1. Mesure de dénombrement. Soit X un ensemble. Pour tout $A \subset X$, posons :

$$\mu(A) = \begin{cases} \mathrm{Card}(A) & \text{si } A \text{ est fini} \\ +\infty & \text{si } A \text{ est infini.} \end{cases}$$

On définit ainsi une mesure positive sur $\mathcal{P}(X)$ appelée <u>mesure de dénombrement sur X</u>.

1.2.3.2 - Masse de Dirac en un point. Soient X un ensemble et $x_0 \in X$ un point de X. Pour tout sous-ensemble A de X, posons :

$$\mu(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_0 \in A \\ 0 & \text{si } x_0 \notin A \end{cases}$$

On définit ainsi une mesure positive sur $\mathcal{P}(X)$ appelée <u>masse de Dirac au point x_0</u>.

1.2.3.3. Mesures discrètes. Soient X un ensemble, $a_1, a_2, \ldots$ une suite de points de X et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ une suite de réels >0. Pour toute partie A de X, on pose

$$\mu(A) = \sum_{n \geq 1} \alpha_n \delta_{a_n}(A) = \sum_{n \geq 1,\, a_n \in A} \alpha_n$$

On définit ainsi une mesure positive μ sur X que l'on note :

$$\mu = \sum_{n \geq 1} \alpha_n \delta_{a_n}$$

1.2.3.4. Mesures Boréliennes. Soit X un espace topologique. On appelle mesure Borélienne sur X toute mesure positive sur la tribu des Boréliens de X qui vérifie :

$$\mu(K) < +\infty$$

pour tout compact K de X. La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^p$, dont la construction sera exposée plus loin, est une mesure Borélienne sur $\mathbb{R}^p$.

1.2.4. Mesure induite. Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $A \in \mathcal{M}$ une partie mesurable de X. Posons $\mathcal{M}_A = \{Z \in \mathcal{M} \mid Z \subset A\}$; on définit ainsi une tribu $\mathcal{M}_A$ sur A. La mesure μ induit alors une mesure positive μ_A sur A par la formule :

$$\mu_A(Z) = \mu(Z)$$

pour tout $Z \in \mathcal{M}_A$. On dit que μ_A est la mesure induite par μ sur A. Lorsque nous aurons construit la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$, la construction ci-dessus nous permettra de disposer automatiquement de la mesure de Lebesgue sur tout ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Donnons maintenant quelques propriétés élémentaires des mesures.

1.2.5- Théorème. Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. On a :

(i) $A \subset B \Longrightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ si $A, B \in \mathcal{M}$;

(ii) Pour toute suite croissante $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ d'éléments de $\mathcal{M}$, on a :

$$\mu\Big(\bigcup_{n \geq 1} A_n\Big) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = \sup_{n \geq 1} \mu(A_n);$$

(iii) Pour toute suite décroissante $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ d'éléments de $\mathcal{M}$ telle que $\mu(A_1) < +\infty$, on a :

$$\mu\Big(\bigcap_{n \geq 1} A_n\Big) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = \inf_{n \geq 1} \mu(A_n);$$

(iv) Pour toute suite $A_1, A_2, \ldots$ d'éléments de $\mathcal{M}$, on a :

$$\mu\Big(\bigcup_{n \geq 1} A_n\Big) \leq \sum_{n \geq 1} \mu(A_n).$$

Démonstration.

(i) Si $A \subset B$, on a : $B = A \cup (B - A)$ avec $A \cap B - A = \emptyset$, d'où :

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A) \geq \mu(A).$$

(ii) Soit $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ une suite d'éléments de $\mathcal{M}$. On a :

$$\bigcup_{n \geq 1} A_n = A_1 \cup (A_2 - A_1) \cup (A_3 - A_2) \cup \cdots \cup (A_{n+1} - A_n) \cup \cdots$$

et, puisque A_1 et les $A_{n+1} - A_n$ sont des éléments de $\mathcal{M}$ deux à deux disjoints, on obtient :

$$\begin{aligned}\mu\Big(\bigcup_{n \geq 1} A_n\Big) &= \mu(A_1) + \mu(A_2 - A_1) + \cdots + \mu(A_{n+1} - A_n) + \cdots \\ &= \lim_{n \to \infty} \mu(A_1) + \mu(A_2 - A_1) + \cdots + \mu(A_n - A_{n-1}) \\ &= \lim_{n \to \infty} \mu(A_n).\end{aligned}$$

En remplaçant $\lim_{n \to \infty}$ par $\sup_{n \geq 1}$, on obtient (ii).

(iii) Posons $B_n = A_1 - A_n$. Alors, $B_1 \subset B_2 \subset \dots$ et

$$\bigcup_{n \geq 1} B_n = A_1 - A, \text{ où } A = \bigcap_{n \geq 1} A_n.$$

De (ii) on déduit :

$$\mu(A_1) - \mu(A) = \mu(A_1 - A) = \mu(\bigcup_{n \geq 1} B_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(B_n)$$
$$= \lim_{n \to \infty} (\mu(A_1) - \mu(A_n)) = \mu(A_1) - \lim_{n \to \infty} \mu(A_n),$$

d'où $\mu(A) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$. Comme la suite $(\mu(A_n))_{n \geq 1}$ est décroissante, on a aussi :

$$\mu(A) = \operatorname{Inf}_{n \geq 1} \mu(A_n).$$

(iv). Si $A, B \in \mathcal{M}$, on a : $A \cup B = A \cup (B - A)$ où A et $B - A$ sont disjoints, d'où :

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B - A) \leq \mu(A) + \mu(B).$$

On en déduit que, si $A_1, A_2, \dots$ est une suite d'éléments de $\mathcal{M}$, on a :

$$\mu(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \leq \mu(A_1) + \dots + \mu(A_n).$$

Posons $B_n = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$. Alors $B_1 \subset B_2 \subset \dots$ et $\bigcup_{n \geq 1} B_n = \bigcup_{n \geq 1} A_n$, de sorte que l'on a, en vertu de (ii) :

$$\mu(\bigcup_{n \geq 1} A_n) = \mu(\bigcup_{n \geq 1} B_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(B_n)$$
$$\leq \lim_{n \to \infty} (\mu(A_1) + \dots + \mu(A_n)) = \sum_{n \geq 1} \mu(A_n).$$

■

1.2.6 - <u>Ensembles de mesure nulle</u>. Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. On dit qu'un sous-ensemble N de X est <u>μ-négligeable</u> (ou de mesure nulle) s'il existe $A \in \mathcal{M}$ tel que $N \subset A$ et $\mu(A) = 0$. Les parties $N \in \mathcal{M}$ telles que $\mu(N) = 0$ sont donc en particulier μ-négligeables.

La réunion $N = N_1 \cup N_2 \cup \dots$ d'une suite $(N_1, N_2, \dots)$ de parties μ-négligeables est encore μ-négligeable. En effet, il existe pour tout $n \geq 1$ une partie $A_n \in \mathcal{M}$ telle que :

$$N_n \subset A_n \quad \text{et} \quad \mu(A_n) = 0.$$

On en déduit que $N \subset A = \bigcup_{n \geq 1} A_n$ où :

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) \leq \sum_{n \geq 1} \mu(A_n) = 0,$$

ce qui prouve que N est μ-négligeable.

1.2.7- Complétion d'un espace mesuré. Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Les parties $A \in \mathcal{M}$ sont appelées mesurables. On pose :

1.2.7.1- Définition. On dit qu'une partie $A \subset X$ est μ-mesurable si elle est de la forme

$$A = B \cup N$$

où $B \in \mathcal{M}$ et où $N \subset X$ est μ-négligeable.

On notera $\mathcal{M}_\mu$ la famille des parties μ-mesurables.

1.2.7.2- Proposition. Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Alors, les parties μ-mesurables forment une tribu $\mathcal{M}_\mu$ qui contient $\mathcal{M}$.

Démonstration. On a $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_\mu$, de sorte que $X \in \mathcal{M}_\mu$. Comme $\mathcal{M}$ est une tribu et qu'une réunion dénombrable d'ensembles μ-négligeables est μ-négligeable, $\mathcal{M}_\mu$ est stable par réunion dénombrable. Il suffit donc, pour terminer la démonstration, de montrer que si $A \in \mathcal{M}_\mu$, alors $A^c \in \mathcal{M}_\mu$. Ecrivons

$$A = B \cup N \quad \text{où } B \in \mathcal{M} \text{ et } N \subset Z \in \mathcal{M} \text{ avec } \mu(Z) = 0.$$

On a :

$$(B \cup N)^c = (B \cup Z)^c \cup ((Z - N) \cap B^c) \text{ et,}$$