Partiel de Calcul intégral du 29 novembre 2010

CORRIGÉ SUCCINT

EXERCICE 1

Question 1. Comme les Boréliens forment une tribu sur $\mathbb{R}$, il suffit de vérifier que $\mathcal{C} = \{A \subset \mathbb{R} \mid A$ est dénombrable ou A^c est dénombrable$\}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$. Or $\mathbb{R} \in \mathcal{C}$ et si $A \in \mathcal{C}$, alors $A^c \in \mathcal{C}$. Il suffit donc de vérifier que si $A_1, A_2, \dots$ appartiennent à $\mathcal{C}$, alors $\bigcup_n A_n \in \mathcal{C}$. Si tous les A_n sont dénombrables, la réunion des A_n est dénombrable et $\bigcup_n A_n \in \mathcal{C}$. S'il existe n_0 tel que $A_{n_0}^c$ soit dénombrable, alors $\left(\bigcup_n A_n\right)^c = \bigcap_n A_n^c \subset A_{n_0}^c$, et $\left(\bigcup_n A_n\right)^c$ est dénombrable. ∎

Question 2. Si $A \in \mathcal{T}$, alors A est Borélien et $x \longmapsto \frac{\mathbb{1}_A(x)}{1+x^2}$ est Lebesgue mesurable comme quotient d'une fonction Borélienne et d'une fonction continue qui ne s'annule pas. Comme on a :

$$\left| \frac{\mathbb{1}_A(x)}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{1+x^2} \quad \text{et que } x \longmapsto \frac{1}{1+x^2} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R},$$

la fonction $x \longmapsto \frac{\mathbb{1}_A(x)}{1+x^2}$ est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}$.

μ est une mesure ≥ 0 car si $A_1, A_2, \dots$ sont des éléments de $\mathcal{T}$ deux à deux disjoints, on a

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \int_{\mathbb{R}} \sum_n \frac{\mathbb{1}_{A_n}(x)}{1+x^2}\, dx = \sum_n \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathbb{1}_{A_n}(x)}{1+x^2}\, dx = \sum_n \mu(A_n)$$

en vertu du théorème d'interversion des signes $\sum$ et $\int$, qui est justifié puisque l'on a :

$$\left| \sum_{n \leq N} \frac{\mathbb{1}_{A_n}(x)}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{1+x^2} \quad \text{et } x \mapsto \frac{1}{1+x^2} \text{ est}$$

intégrable sur $\mathbb{R}$. Comme $\mu(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^2} = \pi < +\infty$, la mesure μ est finie. Soit $A \in \mathcal{T}$ tel que $\mu(A) = 0$. Alors, soit A est dénombrable, et comme un ensemble dénombrable est λ-négligeable, on a bien que tout ensemble dénombrable est μ-négligeable. Soit A^c est dénombrable, en quel cas $\mathbb{1}_A$ est presque partout égale à 1 et $\mu(A) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$, ce qui est absurde. Donc, les $A \in \mathcal{T}$ tels que $\mu(A) = 0$ sont les parties dénombrables de $\mathbb{R}$. Il s'ensuit que les ensembles μ-négligeables de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}, \mu)$ sont les parties dénombrables de $\mathbb{R}$. ∎

Question 3. Une réunion finie de parties deux à deux disjointes de $\mathcal{T}$ est soit un ensemble dénombrable (si toutes les parties sont dénombrables), soit une réunion d'un seul ensemble de complémentaire dénombrable (deux parties de complémentaire dénombrable ne peuvent pas être disjointes) et d'un ensemble dénombrable. Il s'ensuit que, si $e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction simple $\mathcal{T}$-mesurable, elle est de la forme $e = c\,\mathbb{1}_A + e\,\mathbb{1}_{A^c}$ où $A \in \mathcal{T}$ est de complémentaire dénombrable et $c \in \mathbb{R}$. La fonction e prend donc une valeur constante sur le Borélien A de complémentaire dénombrable. Supposons alors que $e_n = c_n \mathbb{1}_{A_n} + e_n \mathbb{1}_{A_n^c}$ converge μ-presque partout vers la fonction f. Posons :

$$A = \bigcap_n A_n \in \mathcal{T}. \quad \text{Alors } A^c = \bigcup_n A_n^c \text{ est dénombrable, et}$$

quitte à retirer de A un ensemble D dénombrable, on sait que $e_n(x) = c_n \longrightarrow f(x)$ pour $x \in A \setminus D = A'$. Il s'ensuit que f est constante sur $A' \in \mathcal{T}$ dont le complémentaire A'^c est dénombrable. ■

Question 4. Si $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ est μ-mesurable, elle est limite simple de fonctions simples, et ce qui précède montre que f est constante sur un Borélien de complémentaire dénombrable. Supposons inversement que :

$$f = c\,\mathbb{1}_A + f\,\mathbb{1}_{A^c} \quad \text{avec } c \in \overline{\mathbb{R}} \text{ et } A \in \mathcal{T} \text{ de complémentaire}$$

dénombrable. Alors, pour tout $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, on a :

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leqq \alpha\} = \{x \in A \mid c \leqq \alpha\} \cup \{x \in A^c \mid f(x) \leqq \alpha\}$$

$$= \begin{cases} A \cup \{x \in A^c \mid f(x) \leqq \alpha\} & \text{si } c \leqq \alpha \\ \{x \in A^c \mid f(x) \leqq \alpha\} & \text{si } c > \alpha \end{cases}$$

Comme $\{x \in A^c \mid f(x) \leqq \alpha\} = D$ est dénombrable (il est inclus dans A^c), on a : $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leqq \alpha\} \in \mathcal{T}$, car cet ensemble est soit égal à $A \cup D$ (et de complémentaire dénombrable), soit égal à D (et il est alors dénombrable). Ainsi, $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ est μ-mesurable si et seulement si elle est de la forme $f = c\,\mathbb{1}_A + f\,\mathbb{1}_{A^c}$ avec $c \in \overline{\mathbb{R}}$ et $A \in \mathcal{T}$ de complémentaire dénombrable, donc si et seulement si elle est constante sur un Borélien de complémentaire dénombrable. Si f est μ-mesurable $\geqq 0$, on a : $f = c\,\mathbb{1}_A + \sum_{n \geqq 1} f(a_n)\,\mathbb{1}_{\{a_n\}}$ avec $c \geqq 0$ et $A^c = \{a_1, a_2, \ldots\}$. On a donc :

$$\int f\,d\mu = \int \sup_n f_n\,d\mu \quad \text{où} \quad f_n = c\,\mathbb{1}_A + \sum_{p \leqq n} f(a_p)\,\mathbb{1}_{\{a_p\}}$$

et, comme $f_n \leqq f_{n+1}$ pour tout n, on a :

$$\int f\,d\mu = \sup_n \int f_n\,d\mu = \sup_n \Big(c\mu(A) + \sum_{p \leqq n} f(a_p)\,\mu(\{a_p\})\Big).$$

Or $\mu(\{a_p\}) = 0$ car $\{a_p\}$ est négligeable pour la mesure de Lebesgue, et $\mu(A) = \pi$ comme on l'a déjà vu. On a donc

$$\int f\,d\mu = c\pi.$$

Il s'ensuit que, si $f = c\,\mathbb{1}_A + f\,\mathbb{1}_{A^c}$ est μ-mesurable à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, elle est μ-intégrable si et seulement si $|c| < +\infty$, i.e. si et seulement si $c \in \mathbb{R}$, donc si et seulement si elle prend une valeur $c \in \mathbb{R}$ constante sur un Borélien de complémentaire dénombrable. Alors, $f^{\pm}$ prend la valeur $c^{\pm}$ sur ce Borélien, d'où

$$\int f\,d\mu = (c^+ - c^-)\pi = c\pi. \quad ■$$

EXERCICE 2

Question 1. La fonction f_n est continue, donc lebesgue-mesurable sur $[0,+\infty[$. Par ailleurs, on a :

$$|f_n(x)| \leq \frac{n}{(1+nx)(1+x)}$$

Comme $\frac{n}{(1+nx)(1+x)} \sim \frac{1}{x^2}$ quand $x \to +\infty$, on a $\int_0^{+\infty} \frac{n\,dx}{(1+nx)(1+x)} < +\infty$, d'où l'on déduit que f_n est lebesgue-intégrable sur $[0,+\infty[$. ∎

Question 2. Pour $x=0$, $f_n(x) = 0 \to 0$ quand $n \to +\infty$. Pour $x>0$, $f_n(x) = \frac{n}{1+nx}\frac{\sin x}{1+x} \to \frac{\sin x}{x(1+x)}$ quand $n \to +\infty$. Posons $f(x) = \frac{\sin x}{x(1+x)}$ pour $x>0$ et $f(0)=0$. Cette fonction f est prolongeable par continuité en $x=0$ en remplaçant la valeur en 0 par 1. Par ailleurs, on a :

$$\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x(1+x)} \right| dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} < +\infty,$$

de sorte que f est intégrable sur $[0,+\infty[$ au sens de lebesgue.
On a $f_n(x) \to f(x)$ pour tout x d'après ce qui précède. Par ailleurs, on a pour tout $x>0$

$$|f_n(x)| = \left| \frac{n}{n+\frac{1}{x}} \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{1+x} \right| \leq \frac{|\sin x|}{x(1+x)} = h(x)$$

et h est intégrable sur $[0,+\infty[$ car elle est prolongeable par continuité sur $[0,1]$ et vérifie

$$h(x) \leq \frac{1}{x^2} \quad \text{pour } x \geq 1 \quad \text{avec} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} < +\infty.$$

D'après le théorème de convergence dominée de lebesgue, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n \sin x}{(1+nx)(1+x)} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x(1+x)} dx. \quad ∎$$

EXERCICE 3

Question 1. Si $x=0$, $f(0,t)=0$ et $t \mapsto f(0,t)$ est intégrable. Si $x>0$, $\frac{1-\exp(-t^2x)}{t^2} \xrightarrow[t\to 0]{} x$, et $t \mapsto f(x,t)$ se prolonge continûment en $t=0$.
On a alors : $\int_1^{+\infty} |f(x,t)|\,dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} < +\infty$ car $1-\exp(-t^2x) \leq 1$ pour $t \geq 0$, de sorte que $t \mapsto f(x,t)$ est lebesgue-intégrable sur $[1,+\infty[$. Comme cette fonction se prolonge continûment à $[0,1]$, elle est intégrable sur $]0,+\infty[$. Posons :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt.$$

À $t>0$ fixé, l'application $x \mapsto \frac{1-\exp(-t^2x)}{t^2}$ est continue.

Par ailleurs, on a pour $a>0$:

$$0 \leqq x \leqq a \implies \left|\frac{1-\exp(-t^2x)}{t^2}\right| \leqq \frac{1-\exp(-t^2a)}{t^2} = f(a,t), \text{ et}$$

l'on sait que $t \mapsto f(a,t)$ est intégrable. D'après le théorème de continuité des fonctions définies par des intégrales, la fonction F est continue sur $[0,a]$ pour tout $a>0$. Elle est donc continue sur $[0,+\infty[$. ∎

Question 2. On a : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \exp(-t^2x)$ et, pour $0<a\leqq x$

on a : $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqq \exp(-t^2a)$. Comme la fonction $t \mapsto \exp(-t^2a)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, la fonction F est dérivable sur $[a,+\infty]$ et on a :

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \exp(-t^2x)dt$$

en vertu du théorème de dérivation des fonctions définies par des intégrales. Posons $u=\sqrt{x}t$ dans l'intégrale ci-dessus. On obtient :

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \exp(-u^2)\frac{du}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{pour } x \geqq a > 0.$$

Comme ceci est vrai pour tout a, F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$$F'(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} \quad \text{pour } x>0. ∎$$

Question 3. De la question 2, on déduit que :

$$F(x) = \sqrt{\pi}\sqrt{x} + C \quad , \text{ où } C \text{ est une constante réelle.}$$

Quand $x \to 0$, $F(x) \to F(0) = 0$ en vertu de la question 1, et donc $C=0$. On a donc $F(x) = \sqrt{\pi x}$, et par conséquent F n'est pas dérivable à droite en $x=0$.

On aurait pu montrer directement que F n'est pas dérivable en $x=0$ à partir de la relation :

$$\frac{F(x)-F(0)}{x} = \int_0^{+\infty} \frac{1-\exp(-t^2x)}{t^2x}dt$$

Posons $\varphi(u) = \frac{1-\exp(-u)}{u}$; on a : $\varphi'(u) = \frac{u\exp(-u)-(1-\exp(-u))}{u^2}$

$$= \frac{\exp(-u)(u+1)-1}{u^2}.$$

Or $\frac{d}{du}(\exp(-u)(u+1)) = -u\exp(u) \leqq 0$ pour $u \geqq 0$, d'où $\exp(-u)(u+1) \leqq \exp(-0) = 1$ pour $u \geqq 0$, et $\varphi'(u) \leqq 0$, ce qui prouve que φ est décroissante. Si $x_n \searrow 0$, $\varphi(t^2x_n) \nearrow 1$ et

$$\frac{F(x_n)-F(0)}{x_n} = \int_0^{+\infty} \varphi(t^2x_n)dt \longrightarrow \int_0^{+\infty} dt = +\infty$$

en vertu du théorème de convergence monotone. Donc F n'est pas dérivable en 0. ∎