Université Claude Bernard Lyon I. Année universitaire 2010-2011
Licence STS, UE MAT 3002L (Calcul Intégral)

CONTRÔLE CONTINU PARTIEL DU LUNDI 29 NOVEMBRE 2010

La durée de l'épreuve est de 2H30. Un barème figure à titre indicatif. On attachera du prix à la rédaction des solutions.

EXERCICE 1 (sur 10 points)

On note $\mathcal{I}$ la famille des Boréliens de $\mathbb{R}$ qui sont dénombrable ou de complémentaire dénombrable. Si $A \in \mathcal{I}$, on note $\mathbf{1}_A$ la fonction caractéristique de A. Enfin, on désigne par λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, et on note $d\lambda(x) = dx$.

Question 1 (1 point). Montrer que $\mathcal{I}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$.

Question 2 (3 points). Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{I}$, la fonction $x \to \dfrac{\mathbf{1}_A(x)}{1+x^2}$ est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour $A \in \mathcal{I}$, on pose :

$$\mu(A) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathbf{1}_A(x)}{1+x^2} d\lambda(x) = \int_A \frac{dx}{1+x^2}$$

Montrer que μ est une mesure positive finie sur $\mathcal{I}$. Montrer enfin que les ensembles $\mu-$négligeables de l'espace $(\mathbb{R},\mathcal{I},\mu)$ sont les sous-ensembles dénombrables de $\mathbb{R}$.

Question 3 (3 points). Soit $e : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction simple relativement à l'espace mesuré $(\mathbb{R},\mathcal{I},\mu)$. Montrer qu'il existe un Borélien de $\mathbb{R}$ de complémentaire dénombrable sur lequel e prend une valeur constante. Montrer que, si la suite $(e_1,e_2,...)$ de fonctions simples converge $\mu-$presque partout vers la fonction f, alors $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ est constante sur un Borélien de $\mathbb{R}$ de complémentaire dénombrable.

Question 4 (3 points). Déduire de la question 3 qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ est $\mu-$mesurable si et seulement si elle est constante sur un Borélien de $\mathbb{R}$ de complémentaire dénombrable. Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ est $\mu-$intégrable si et seulement si elle prend une valeur constante c réelle sur un Borélien de complémentaire dénombrable, et que l'on a dans ce cas : $\int_{\mathbb{R}} f d\mu = c\pi$.

EXERCICE 2 (sur 5 points)

Pour tout entier $n \geq 1$ et tout $x \geq 0$, on pose :

$$f_n(x) = \frac{n \sin x}{(1+nx)(1+x)}.$$

Question 1 (2 points). Montrer que la fonction f_n est Lebesgue-intégrable sur $[0,+\infty[$ pour tout $n \geq 1$.

Question 2 (3 points). Montrer que, pour tout $x \geq 0$, la suite $(f_n(x))_{n\geq 1}$ converge. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n \sin x}{(1+nx)(1+x)} dx$.

EXERCICE 3 (Sur 6 points)

On considère la fonction $f : [0,+\infty[\times]0,\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,t) = \frac{1-\exp(-t^2 x)}{t^2}.$$

Question 1 (2 points). Montrer que l'application $t \to f(x,t)$ est Lebesgue-intégrable sur $]0,\infty[$ pour tout $x \geq 0$. Montrer que la fonction $F : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)dt$ est continue sur $[0,+\infty[$.

Question 2 (3 points). Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $F'(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$ pour tout $x > 0$ (on admettra que $\int_0^{+\infty} \exp(-t^2)dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

Question 3 (1 point). Déduire de ce qui précède la valeur de $F(x)$ pour tout $x \geq 0$. Vérifier que F n'est pas dérivable à droite en 0. Montrer que ce dernier résultat pouvait être obtenu directement à partir de la définition de F, sans calculer explicitement $F(x)$.