Université Claude Bernard
MATH II-Algèbre

FICHE N°6 :

Exercice 1. Calculer les déterminants des matrices suivantes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & ka \\ 1 & b & kb \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \cos\alpha & \lambda & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & \mu & \cos\alpha \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Pour $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, posons

$$M_{a,b,c,d} := \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}.$$

1. Calculer ${}^tMM$.
2. En déduire le déterminant de M.

Exercice 3. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tA = -A$. Montrer que si A est inversible, alors n est un nombre pair.

Exercice 4. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = 0, A \neq 0$ et $B \neq 0$. Montrer que $\det A = \det B = 0$. Donner un exemple.

Exercice 5. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. Posons $A := \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u)$ où $\mathcal{B}$ est une base de E. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer qu'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $u(x) = \lambda x$ si et seulement si $\det(A - \lambda \mathbf{1}_n) = 0$.

Exercice 6. Calculer le rang de la matrice $\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$ en fonction de $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 7. Soit M une matrice triangulaire par blocs, i.e., il existe $A_{i,j} \in M_{n_i,n_j}(\mathbb{K})$ $(1 \leq i \leq j \leq r)$ telles que

$$M = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,r} \\ \mathbf{0} & A_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & A_{r-1,r} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & A_{r,r} \end{pmatrix}.$$

1. Considérons d'abord le cas où $r = 2$. Montrer que $M = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{n_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_{n_2} \end{pmatrix}$.
   En déduire que $\det M = \det A_{1,1} \det A_{2,2}$.
2. Dans le cas général, montrer que $\det M = \prod_{i=1}^{r} \det A_{i,i}$ par récurrence sur r.

Exercice 8. Soient $a, b \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et D_n le déterminant de la matrice carrée de degré n suivante:

$$\begin{pmatrix} a+b & b & 0 & \cdots & 0 \\ a & a+b & b & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & a & a+b & b \\ 0 & \cdots & 0 & a & a+b \end{pmatrix}.$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq 3$, montrer que $D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$.
2. En déduire que $D_n = \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k$.

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > 1$. Pour $1 \leq i, j \leq n$, soient $f_{i,j} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonctions dérivables. Montrer les formules suivantes:

$$\frac{d}{dx} \begin{vmatrix} f_{1,1}(x) & \cdots & f_{1,n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n,1}(x) & \cdots & f_{n,n}(x) \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} f_{1,1}(x) & \cdots & \cdots & f_{1,n}(x) \\ \vdots & & & \vdots \\ f'_{i,1}(x) & \cdots & \cdots & f'_{i,n}(x) \\ \vdots & & & \vdots \\ f_{n,1}(x) & \cdots & \cdots & f_{n,n}(x) \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \begin{vmatrix} f_{1,1}(x) & \cdots & f'_{1,j}(x) & \cdots & f_{1,n}(x) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_{n,1}(x) & \cdots & f'_{n,j}(x) & \cdots & f_{n,n}(x) \end{vmatrix}$$

Exercice 10. Soient $a, b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$. On considère l'équation différentielle
$(*) : y'' + ay' + by = 0$. Soit S le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des solutions réelles de $(*)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. On admettra que $\dim S = 2$.

1. Pour $y_1, y_2 \in S$, on pose
$$W(x) = W(y_1, y_2)(x) := \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}.$$
   $W(x)$ est appelé le **wronskien** de y_1 et y_2. Montrer que $W'(x) = -a(x)W(x)$. En déduire que, pour $x_0 \in \mathbb{R}$, on a
$$W(x) = W(x_0) \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a(t)dt\right).$$

2. Montrer que $\{y_1, y_2\}$ est une base de S si et seulement si $W(x_0) \neq 0$.

Exercice 11. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $P_n(X) \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme de degré n tel que l'évaluation en $\lambda \in \mathbb{R}$ soit donné par le déterminant

$$P_n(\lambda) = \begin{vmatrix} 2\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2\lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 2\lambda & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $P_{n+2}(X) = 2XP_{n+1}(X) - P_n(X)$.
2. En déduire que $P_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 12. Soient $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > 1$, $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots y_n \in \mathbb{K}$ tels que $x_i + y_j \neq 0$ pour tous $1 \leq i, j \leq n$. Calculons le déterminant de la matrice $C_n = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, où $c_{i,j} := \dfrac{1}{x_i + y_j}$.

1. En appliquant le pivot de Gauss sur les colonnes, montrer que
$$\det C_n = c_{n,n} \det \left(c_{i,j} - \frac{c_{n,j}}{c_{n,n}} c_{i,n} \right)_{1 \leq i,j < n}.$$
2. Vérifier la formule $c_{i,j} - \dfrac{c_{n,j}}{c_{n,n}} c_{i,n} = \dfrac{(x_i - y_n)(y_j - y_n)}{(x_i + y_j)(x_i + y_n)(x_n + y_j)}$.
3. Montrer que $\left(c_{i,j} - \dfrac{c_{n,j}}{c_{n,n}} c_{i,n} \right)_{1 \leq i,j < n} = \operatorname{diag}\left(\dfrac{x_i - y_n}{x_i + y_n} \right)_{1 \leq i < n} C_{n-1} \operatorname{diag}\left(\dfrac{y_j - y_n}{x_n + y_j} \right)_{1 \leq j < n}$,

   où $\operatorname{diag}(a_1, \cdots, a_{n-1})$ signifie la matrice diagonale $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \end{pmatrix}$.
4. En déduire que
$$\det C_n = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (x_i - x_n)(y_i - y_n)}{(x_n + y_n) \prod_{i=1}^{n-1} (x_i + y_n)(x_n + y_i)} \det C_{n-1}.$$
5. Par récurrence sur $n > 1$, montrer la formule suivante:
$$\det \left(\frac{1}{x_i + y_j} \right)_{1 \leq i,j \leq n} = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)(y_i - y_j)}{\prod_{i,j=1}^{n} (x_i + y_j)}.$$

   Ce déterminant est appelé **déterminant de Cauchy**.