Université Claude Bernard
MATH II-Algèbre

FICHE N°5 :

**Exercice 1.** Soit $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$u(x, y) = (ax + ty, tx + dy),$$

où $a, b$ et $t$ sont des nombre réels.

1. Donner la matrice de $u$ dans la base canonique $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. On la note par $A$.
2. Montrer qu'ils existent trois nombre réels $A, B$ et $\alpha$ tels que
$$a = A + B\cos 2\alpha, \qquad t = B\sin 2\alpha, \qquad d = A - B\cos 2\alpha.$$
3. Posons $\mathbf{f}_1 := (\cos\alpha, \sin\alpha)$ et $\mathbf{f}_2 := (-\sin\alpha, \cos\alpha)$.
Donner la matrice de passage $P$ de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$.
4. Calculer $P^{-1}$. En déduire la matrice de $u$ dans la base $\mathcal{C}$.

**Exercice 2.** Soit $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ une base de $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{C} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$. Soit $u$ une application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\begin{aligned} u(\mathbf{e}_1) &= -2\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3, \qquad & u(\mathbf{e}_2) &= \mathbf{f}_1 - 2\mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3, \\ u(\mathbf{e}_3) &= \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 - 2\mathbf{f}_3, \qquad & u(\mathbf{e}_4) &= \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_3 \end{aligned}$$

1. Donner la matrice $A$ de $u$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.
2. Posons $\mathbf{e}'_1 := \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}'_2 := \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}'_3 := \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4$ et $\mathbf{e}'_4 := \mathbf{e}_4$. Montrer que $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3, \mathbf{e}'_4\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$. Donner la matrice de passage $P$ de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.
3. Posons $\mathbf{f}'_1 := \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}'_2 := \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3$ et $\mathbf{f}'_3 = \mathbf{f}_3$. Montrer que $\mathcal{C}' = \{\mathbf{f}'_1, \mathbf{f}'_2, \mathbf{f}'_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Donner la matrice de passage $Q$ de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$.
4. Calculer $Q^{-1}$.
5. Calculer la matrice de $u$ dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$. En déduire le rang de $u$.

**Exercice 3.** Dans $E = \mathbb{R}^3$, on note $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la base canonique. Soit $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Trouver un vecteur $\mathbf{f}_1$ non nul tel que $u(\mathbf{f}_1) = -2\mathbf{f}_1$. Ensuite, un vecteur $\mathbf{f}_2$ non nul tel que $u(\mathbf{f}_2) = 4\mathbf{f}_2$.
2. Trouver une base $\{\mathbf{f}_3\}$ de Ker $u$.
3. Montrer que $\mathcal{C} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Écrire la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.
4. Calculer la matrice $B := \mathrm{mat}_{\mathcal{C}}(u)$ ensuite $B^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $A^n$ en terme des matrices $B^n$ et $P$. En déduire $A^n$.