Université Claude Bernard
MATH II-Algèbre

FICHE N°4 :

Exercice 1. Soient A, B deux matrices définies par

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^2, B^2, AB, BA, ABA et BAB.

Exercice 2. Soient S, T deux matrices définies par

$$S := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad T := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer S^2, T^2, ST, TS, STS et TST.

Exercice 3. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$A(t) := \begin{pmatrix} \mathrm{ch}t & \mathrm{sh}t \\ \mathrm{sh}t & \mathrm{ch}t \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $A(s)A(t)$ pour $s, t \in \mathbb{R}$ et $A(0)$.
2. En déduire que $A(t)$ est inversible.

Exercice 4. Pour $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, posons

$$M_{a,b,c,d} := \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $M_{a,b,c,d}M_{a,-b,-c,-d}$.
2. En déduire que $M_{a,b,c,d}$ est inversible sauf si $a = b = c = d = 0$.

Exercice 5. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $J \in M_4(\mathbb{R})$ définie par $J = (1)_{1 \le i,j \le 4}$. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ tel que la matrice $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u)$, où $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^4$, soit donnée par $(a-b)\mathbf{1}_4 + bJ$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{C} = \{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_{i+1}\ (1 \le i \le 3)\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

2. Pour chaque vecteur v dans $\mathcal{C}$, calculer le vecteur des coordonnées de $u(v)$ dans la base $\mathcal{B}$ et puis dans la base $\mathcal{C}$. En déduire que la matrice $\mathrm{mat}_{\mathcal{C}}(u)$ est une matrice diagonale.

3. En déduire que u est bijectif si et seulement si $(a+3b)(a-b) \neq 0$.

Exercice 6. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2, \quad f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_3, \quad f(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_4, \quad f(\mathbf{e}_4) = \mathbf{e}_1,$$

où $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1. Montrer que l'hyperplane Π défini par $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 | x + y + z + w = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et que $\mathcal{B} := \{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4\}$ est une base de Π.

2. Montrer que f stabilise Π, c.-à-d., $f(\Pi) \subset \Pi$. Notons la restriction de f à Π par g.

3. Ecrire la matrice $A := \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(g)$.

4. Calculer A^4. En déduire que A est inversible.

Exercice 7. Soit $f : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par

$$A \mapsto A + {}^tA.$$

1. Déterminer $A_n := \mathrm{Ker} f$ et $S_n := \mathrm{Im} f$.

2. Calculer les dimensions de A_n et S_n.

3. Montrer que $\mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f = M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 8. Rappelons que, pour une matrice $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$, la trace de A est définie par

$$\mathrm{tr}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

1. Montrer que tr est une application linéaire de $M_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$.

2. Montrer que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ pour toutes $A, B \in M_n(\mathbb{K})$.

3. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$. Montrer qu'il n'existe pas de matrices $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ qui satisfont $AB - BA = \mathbf{1}_n$.

Exercice 9. Considérons $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que l'application $\varphi_z : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $\varphi_z(w) := zw$ est linéaire.

2. Pour $z = a + ib \in \mathbb{C}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, expliciter la matrice M_z de φ_z dans la base $\mathcal{B} := \{1, i\}$.

3. Montrer que $M_z + M_w = M_{z+w}$ et $M_z M_w = M_{zw}$ pour $z, w \in \mathbb{C}$.

4. Posons $I := M_i$. Calculer $\exp(tI) := \mathbf{1}_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} I^k$.

Exercice 10. Soit $\mathcal{H}$ le $\mathbb{R}$ sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{C})$ engendré par

$$\mathbf{1}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad I := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad K := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $I^2, J^2, K^2, IJ, JI, JK, KJ, KI$ et IK.

2. Montrer que pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $(a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0)$,
   il existe uniques $p, q, r, s \in \mathbb{R}$ tels que $(a\mathbf{1}_2 + bI + cJ + dJ)(p\mathbf{1}_2 + qI + rJ + sK) = \mathbf{1}_2$.

3. En déduire que $\mathcal{H}$ est un corps non-commutatif.

Exercice 11. Soient $A, B \in M_3(\mathbb{K})$ deux matrices telles que $AB = BA$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k.$$

2. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, où A est la matrice suivante:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \qquad a \in \mathbb{K}.$$

Exercice 12. Soit A la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Posons $B := A - \mathbf{1}_3$. Calculer B^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

2. En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

3. Vérifier la formule $A^2 = 5A - 4\mathbf{1}_3$. En déduire que A et inversible.

4. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.