

FICHE N°3 :

Exercice 1. Parmi les applications suivantes, déterminer celles qui sont linéaires (avec $a, b \in \mathbb{R}$):

$$\begin{array}{lll}
 a) \quad \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 & b) \quad \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 & c) \quad \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\
 (x, y) \longmapsto (y, x) & (x, y) \longmapsto (a, b) & (x, y) \longmapsto (x + a, y + b) \\
 d) \quad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 & e) \quad \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 & f) \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\
 (x, y, z) \longmapsto (x, y^2, z^3) & (x, y) \longmapsto (x, y - x, -y) & x \longmapsto \cos x
 \end{array}$$

Exercice 2. Soit $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ deux applications linéaires définies par

$$a) \quad f(x, y) := (x, 0), \quad g(x, y) := (0, y), \quad b) \quad f(x, y) := (y, 0), \quad g(x, y) := (0, x).$$

Pour chaque cas, déterminer $f + g, f \circ g, g \circ f, f^2$ et g^2 .

Exercice 3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et u la symétrie de \mathbb{R}^2 par rapport à la droite l_α définie par

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (\sin \alpha)x - (\cos \alpha)y = 0\}.$$

Ici, on montre que u est une application linéaire de deux manières différentes.

1. Soit $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ la base canonique de \mathbb{R}^2 .
 - (a) Notons $x'\mathbf{e}_1 + y'\mathbf{e}_2$ l'image de $x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 \in \mathbb{R}^2$ par u .
Expliciter (x', y') en fonction de (x, y) .
 - (b) Conclure.
2. Posons $\mathbf{u}_1 := (\cos \alpha, \sin \alpha)$ et $\mathbf{u}_2 := (-\sin \alpha, \cos \alpha)$.
 - (a) Calculer $u(x\mathbf{u}_1 + y\mathbf{u}_2)$.
 - (b) Conclure.

Exercice 4. Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 défini par

$$f(\mathbf{e}_1) = 13\mathbf{e}_1 + 12\mathbf{e}_2 + 6\mathbf{e}_3, \quad f(\mathbf{e}_2) = -8\mathbf{e}_1 - 7\mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_3, \quad f(\mathbf{e}_3) = -12\mathbf{e}_1 - 12\mathbf{e}_2 - 5\mathbf{e}_3,$$

où $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ est la base canonique de \mathbb{R}^3 .

1. Montrer que $F_1 := \{u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = u\}$ et $F_2 := \{u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = -u\}$ sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 et déterminer la dimension de chacun d'eux.

2. Montrer que F_1 et F_2 sont supplémentaires.

Exercice 5. Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 défini par

$$f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2, \quad f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_3, \quad f(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1,$$

où $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ est la base canonique de \mathbb{R}^3 .

1. Montrer que f est bijective.
2. Montrer que $F = \{u \in \mathbb{R}^3 | f(u) = u\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .
3. Montrer que $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 et que $u(G) = G$.

Exercice 6. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E tel que $u^2 = u$. (On dit que u est un *projecteur*.)

1. Montrer que $\text{id}_E - u$ est aussi un projecteur.
2. Montrer que $\text{Ker}(\text{id}_E - u) = \text{Im } u$
3. Montrer que $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u$ sont supplémentaires.
4. Donner un exemple de projecteur.

Exercice 7. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et u un endomorphisme de E vérifiant $u^2 = \text{id}_E$.

1. Montrer que $E = \text{Ker}(u - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(u + \text{id}_E)$.
2. Montrer que si $u \neq \text{id}_E$ et $u \neq -\text{id}_E$, alors il existe une base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_{-1}$ de E telle que $u(x) = x$ pour $x \in \mathcal{B}_1$ et $u(x) = -x$ pour $x \in \mathcal{B}_{-1}$.
3. Donner un tel exemple de u .

Exercice 8. Soient E, F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F . Soit $\mathcal{F} = \{v_1, \dots, v_p\}$ un système de vecteurs de E .

1. Montrer que si \mathcal{F} est un système générateur de E , alors $f(\mathcal{F})$ est un système générateur de $\text{Im } f$.
2. Montrer que si $f(\mathcal{F})$ est libre, alors \mathcal{F} est aussi libre.
3. Montrer que si f est injective et \mathcal{F} est libre, alors $f(\mathcal{F})$ est aussi libre.

Exercice 9. Soit u l'application de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R}^3 définie, pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, par

$$u(x, y, z, t) = (x + y + z + t, y - t, x - 2z + 3t).$$

1. Montrer que u est linéaire.
2. Déterminer une base et la dimension du noyau de u . Est-elle injective ?
3. Montrer que u est surjective.

Exercice 10. Soit n un entier strictement positif. On considère u un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ défini par

$$u : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R}); \quad A \longmapsto A - \frac{1}{n} \operatorname{tr}(A) \mathbf{1}_n,$$

où $\operatorname{tr}(A) := \sum_{i=1}^n a_{i,i}$ est la **trace** de la matrice $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$.

1. Déterminer le noyau $\operatorname{Ker} u$. En déduire la dimension de $\operatorname{Im} u$.
2. Montrer que $\operatorname{Im} u = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr}(X) = 0\}$.
3. Montrer que u est un projecteur.

Exercice 11. Soit E, E' deux \mathbb{K} -espaces vectoriels. On dit que E et E' sont **isomorphe** s'il existe une application linéaire bijective, appelé un **isomorphisme**, de E vers E' et noté par $E \cong E'$.

1. Montrer que 'd'être isomorphe' est une relation d'équivalence, c.-à-d.,
 - (a) $E \cong E$,
 - (b) $E \cong E' \implies E' \cong E$,
 - (c) $E \cong E'$ et $E' \cong E'' \implies E \cong E''$.
2. Montrer que s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\dim E = n$, E est isomorphe à \mathbb{K}^n .

Exercice 12. Soit \mathcal{P} l'espace des fonctions polynomiales, c.-à-d.,

$$\mathcal{P} := \left\{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \begin{array}{l} \exists n \in \mathbb{N}, \exists a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \text{ t.q.} \\ f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \quad (x \in \mathbb{R}) \end{array} \right\}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) := x^n$ ($x \in \mathbb{R}$).

1. Montrer que la famille $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de \mathcal{P} .

Soient u, v endomorphismes de \mathcal{P} défini par

$$u(f) := \frac{df}{dx}, \quad v(f)(x) := \int_0^x f(t) dt.$$

2. Montrer que $u \circ v = \operatorname{id}_{\mathcal{P}}$.
3. $v \circ u$ est-elle surjective ou injective ?