

FICHE N°2 :

Exercice 1. Soit $E = \mathbb{R}^3$ et F, F_1, F_2 sous-espaces vectoriels de E définis par

$$F_1 := \{(x, 0, 0) | x \in \mathbb{R}\}, \quad F_2 := \{(0, y, 0) | y \in \mathbb{R}\}, \quad F := \{(x, y, z) | x = y\}.$$

1. Déterminer les sous-espaces vectoriels $F_1 + F_2$ et ensuite $(F_1 + F_2) \cap F$.
2. Déterminer les sous-espaces vectoriels $F_1 \cap F, F_2 \cap F$ et ensuite $F_1 \cap F + F_2 \cap F$.

Exercice 2. Soit $E = \mathbb{R}^3$ et F_1, F_2, F_3 sous-espaces vectoriels de E définis par

$$F_1 := \{(t, -t, 0) | t \in \mathbb{R}\}, \quad F_2 := \{(0, t, -t) | t \in \mathbb{R}\}, \quad F_3 := \{(t, 0, -t) | t \in \mathbb{R}\}.$$

1. Montrer que $F_1 \cap F_2 = \{0\}, F_2 \cap F_3 = \{0\}$ et $F_3 \cap F_1 = \{0\}$.
2. La somme $F_1 + F_2 + F_3$ est-elle directe ? Vérifier votre réponse.

Exercice 3. Dans chaque cas, vérifier si les deux vecteurs forment une famille libre.

$$a) u = (2, -3), v = (-1, 1), \quad b) u = (m + 1, -1), v = (-3, m - 1) \text{ où } m \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4. Les familles de \mathbb{R}^3 suivantes sont-elles libres ou liées ?

1. $u = (1, 1, 1), v = (1, 1 - 1)$.
2. $u = (1, 0, -1), v = (-1, 1, 0), w = (0, -1, 1)$.
3. $u = (1, 1, 0), v = (0, 1, 1), w = (1, 0, 1), z = (-1, 1, 1)$.
4. $u = (1, 1, 1), v = (2, -1, 2), w = (1, -2, -1)$.

Les familles ci-dessus sont-elles génératrices de \mathbb{R}^3 ? Lorsque la réponse est négative, on déterminera le sous-espace engendré et sa nature géométrique.

Exercice 5. Donner deux bases du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} . Donner les coordonnées de $z = 3 + 2i$ dans chacune de ces bases.

Exercice 6. On considère les sous-ensembles de \mathbb{R}^4 suivants:

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x + y + z + t = 0\},$$
$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x + y = z + t = 0\},$$
$$H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x = y = z = t\}.$$

1. Vérifier que ce sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^4 . Donner une base et la dimension de chacun d'eux.
2. Quelle est la dimension de $F + G$?
3. Montrer que $\mathbb{R}^4 = F \oplus H$.

Exercice 7. Soit E le sous-ensemble de \mathbb{R}^4 défini par

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0 \text{ et } z = 2t\}.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 .
2. Déterminer une base \mathcal{B} de E .
3. Compléter \mathcal{B} en une base de \mathbb{R}^4 .

Exercice 8. Soit $a \in \mathbb{R}$ et E_a le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 engendré par les trois vecteurs $(1, 1, a)$, $(1, a, 1)$, $(a, 1, 1)$. Suivant la valeur de a , déterminer la dimension de E_a .

Exercice 9. On considère l'équation différentielle $(*) : y'' + y = 0$.

Soit S l'ensemble des fonctions réelles de classe \mathcal{C}^∞ qui sont solutions de $(*)$.

1. Montrer que S est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On admettra que $\dim S = 2$.
2. Montrer que $\cos(x)$ et $\sin(x)$ appartiennent à S .
3. Montrer que la famille $\{\cos(x), \sin(x)\}$ est libre.
4. Conclure.

Exercice 10. Soit E, F, G trois parties de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ défini par

$$E = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \exists a, b, c \in \mathbb{R} \text{ t.q. } f(x) = ax^2 + bx + c\},$$

$$F := \{f \in E \mid f(0) = 0\}, \quad G := \{f \in E \mid \deg f \leq 1\}.$$

1. Montrer que E, F, G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Montrer que $E = F + G$ et que cette somme n'est pas en directe.
3. Trouver un supplémentaire de F dans E .

Exercice 11. Soit S l'espace vectoriel des suites réelles finies:

$S = \{(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \mid u_k \in \mathbb{R} \text{ et } u_k = 0 \text{ pour } k \gg 0\}$. Pour $i \in \mathbb{N}$, on définit $s^i = (s_k^i)_k \in S$ par $s_k^i = 1$ et $s_k^i = 0$ ($k \neq i$).

1. Expliciter s^0, s^1, s^2 .
2. Montrer que la famille $\{s^i\}_{i \in \mathbb{N}}$ est une base de S .