Université Claude Bernard Lyon 1
Math II - Algèbre

Contrôle Partiel

Les documents les calculettes et les téléphones portables ne sont pas autorisés.

Dans ce contrôle, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif.

Question de cours. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et u une application linéaire de E dans F.

1. Rappeler la définition de $\mathrm{Ker} u$. Montrer que u est injective si et seulement si $\mathrm{Ker} u = \{0\}$.
2. Rappeler la définition du rang de u.
3. Rappeler la formule du rang.

EXERCICE 1. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. $\mathcal{F} = \{u_1, u_2, \cdots, u_p\}$ une famille de vecteurs de E.

1. Montrer que si $f(\mathcal{F}) = \{f(u_1), \cdots, f(u_p)\}$ est une famille libre, alors $\mathcal{F}$ l'est aussi.
2. Montrer que, si f est injective et $\mathcal{F}$ est une famille libre, $f(\mathcal{F})$ est une famille libre.

EXERCICE 2. Soit u l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\begin{aligned} u(\mathbf{e}_1) &= 3\mathbf{f}_1 + 2\mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3, \qquad & u(\mathbf{e}_2) &= -\mathbf{f}_1 + 2\mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3 \\ u(\mathbf{e}_3) &= -\mathbf{f}_1 - 2\mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3, \qquad & u(\mathbf{e}_4) &= -\mathbf{f}_1 - 2\mathbf{f}_2 - 3\mathbf{f}_3. \end{aligned}$$

où $\mathcal{B} := \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{C} := \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer une base et la dimension du noyau de u.
2. Donner la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.
3. Posons

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &:= \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \qquad & \mathbf{e}'_2 &:= \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_3 &:= \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4, \qquad & \mathbf{e}'_4 &:= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4. \end{aligned}$$

   Montrer que $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3, \mathbf{e}'_4\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

4. Donner la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$. En déduire la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}$.
5. Calculer le rang de u. u est-elle surjective ?

EXERCICE 3. Soient A et N les matrices

$$A := \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \qquad N := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ et $b \in \mathbb{K}$.

1. Calculer N^2 et N^3.
2. Écrire A comme combinaison linéaire de N et $\mathbf{1}_3$. En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Calculer $A(a^2\mathbf{1}_3 - abN + b^2N^2)$. En déduire que A est inversible.
4. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.