Université Claude Bernard Lyon 1
Math II - Algèbre

Corrigé de Contrôle Continu 4

Question de cours.

1. Soit $p_{i,j} \in \mathbb{K}$ les scalaires tels que $\mathbf{e}'_j = \sum_{i=1}^n p_{i,j}\mathbf{e}_i$ pour tout $1 \leq j \leq n$. La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E) = (p_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$.
2. $B = QAP$.

EXERCICE 1. Puisque $\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1\cdot 3 - 2\cdot 2)(1\cdot 1 - 2\cdot 0) = -1 \neq 0$, A est inversible. En effet, l'inverse de la matrice A est donnée par $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 2.

1. $\det(M_a) = a(a-1)^3(a+1)$.
2. La matrice M_a est inversible si et seulement si $\det(M_a) \neq 0$, c.-à-d., $a \neq 0, \pm 1$.
3. Le rang de la matrice M_a est 3 si $a \neq 0, \pm 1$, 1 si $a = 1$ et 2 si $a = -1, 0$.

EXERCICE 3.

1. Développer le déterminant par rapport à la première ligne:
$$a_n = 2\mathrm{ch}(x)a_{n-1} + \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 2\mathrm{ch}(x) & -1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & -1 & 2\mathrm{ch}(x) & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2\mathrm{ch}(x) \end{vmatrix}.$$
En développant ce dernier par rapport à la première colonne, on en conclut $a_n = 2\mathrm{ch}(x)a_{n-1} - a_{n-2}$.
2. Par définition, $a_1 = 2\mathrm{ch}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(2x)}{\mathrm{sh}(x)}$ et $a_2 = 4\mathrm{ch}^2(x) - 1 = \dfrac{\mathrm{sh}(3x)}{\mathrm{sh}(x)}$.
Pour $n \geq 3$, d'après 1., on a
$$a_n = \frac{1}{\mathrm{sh}(x)}(2\mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(nx) - \mathrm{sh}((n-1)x))) = \frac{\mathrm{sh}((n+1)x)}{\mathrm{sh}(x)}.$$
Par récurrence, on a obtenu la formule en question.