Université Claude Bernard Lyon 1
Math II - Algèbre

Contrôle Continu 4

Les documents les calculettes et les téléphones portables ne sont pas autorisés.

Dans ce contrôle, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif.

Question de cours. Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et soit u une application linéaire de E dans F. Soient $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n\}, \mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \cdots, \mathbf{e}'_n\}$ deux bases de E et $\mathcal{C} = \{\mathbf{f}_1, \cdots, \mathbf{f}_m\}, \mathcal{C}' = \{\mathbf{f}'_1, \cdots, \mathbf{f}'_m\}$ deux bases de F.

1. Rappeler la définition de la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
2. Soient P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, Q la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$, A la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}'$, et B la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}$. Exprimer la matrice B en terme des matrices A, P et Q.

EXERCICE 1. Posons

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que A est inversible. Ensuite, calculer A^{-1}.

EXERCICE 2. Pour $a \in \mathbb{R}$, posons

$$M_a := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1+a & 1+a^2 & a+a^2 \\ a & a^2 & a^3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le déterminant de M_a.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur a pour que la matrice M_a soit inversible.
3. Déterminer le rang de la matrice M_a en fonction de a.

__**Rappel**__ Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{ch}(x) := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \qquad \operatorname{sh}(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

EXERCICE 3. Pour $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, soit a_n le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} 2\operatorname{ch}(x) & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2\operatorname{ch}(x) & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2\operatorname{ch}(x) & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2\operatorname{ch}(x) \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K}).$$

1. Montrer que $a_n = 2\operatorname{ch}(x)a_{n-1} - a_{n-2}$ pour $n \geq 3$.

2. En déduire que $a_n = \dfrac{\operatorname{sh}((n+1)x)}{\operatorname{sh}(x)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.